解答例

STEP I 2002、第 3 問

純粋数学 • 微分による不等式

> **STEP I 2002、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

鍵となる考え方

2 つの平方根（square root）を $\sqrt{P}$ と $\sqrt{Q}$ とおく。根号の中身どうしはうまく結びついており、$P+Q=a^2+b^2$ は一定で、さらにそれぞれの導関数（derivative）は大きさが等しく符号が逆である。このため $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ はきれいに因数分解でき、その符号はただ 1 つの三角関数の因子で決まる。y の最大値と最小値がわかれば、二重不等式（double inequality）は単に「最小値 $\le y \le$ 最大値」ということにすぎず、両端の大小が正しい順になっていることは最初の小問が保証してくれる。

解答

最初の不等式

展開すると

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\ge 0,$$

となるので $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a=b$ のときである。

停留点

$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ とおき、

$$P=a^2c^2+b^2s^2,\qquad Q=a^2s^2+b^2c^2,\qquad y=\sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

とする。まず 2 つの特別な場合を考える。$a^2=b^2$ ならば、すべての θ に対して $P=Q=a^2$ であるから $y=2|a|$ は定数であり、すべての点が（自明に）停留点と

なる。この場合はいったん脇に置く。$a = 0$ または $b = 0$（ただし両方ではない）ならば、ある θ で P または Q が 0 になり、そこで y は微分可能（differentiable）でない。この場合は最後に扱う。そこで当面は $ab \neq 0$ かつ $a^2 \neq b^2$ と仮定する。このとき $P \geq \min(a^2, b^2)(c^2 + s^2) > 0$ であり、同様に $Q > 0$ であるから、y はいたるところで微分可能である。

微分すると

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2cs + 2b^2sc = (b^2 - a^2)\sin 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = (a^2 - b^2)\sin 2\theta.$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}} - \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta\,(\sqrt{Q} - \sqrt{P})}{2\sqrt{PQ}}.$$

$\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ の符号を調べるために有理化（rationalise）する：

$$\sqrt{Q} - \sqrt{P} = \frac{Q - P}{\sqrt{Q} + \sqrt{P}}, \qquad Q - P = (a^2 - b^2)(s^2 - c^2) = (b^2 - a^2)\cos 2\theta.$$

これを代入し、$2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\,(\sqrt{P} + \sqrt{Q})}.$$

考えてみよう わざわざ $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ を有理化する価値があるのはなぜだろうか？

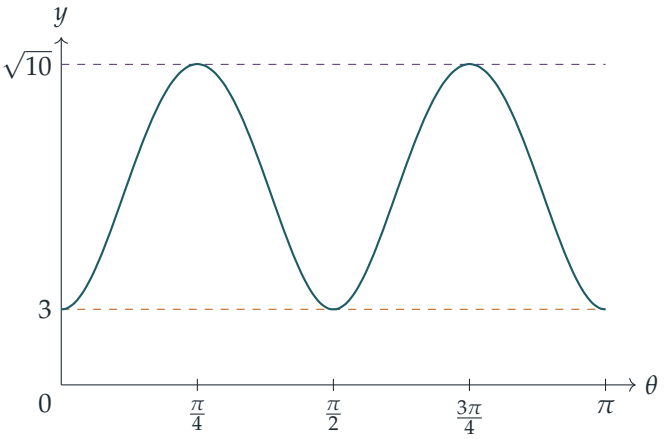
そうすることで、$\sin 4\theta$ 以外のすべてが正であることが一目でわかるからである。実際、$(a^2 - b^2)^2 > 0$ であり、P、Q も正である。よって $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の符号は $\sin 4\theta$ の符号とちょうど一致し、これによって停留点（stationary point）の位置とその種類の両方がわかる。

停留点は $\sin 4\theta = 0$ となる点、すなわち整数 n に対して $\theta = \frac{1}{4}n\pi$ となる点である。

- n が偶数のとき、$\theta = \frac{1}{2}k\pi$ であるから $\{c^2, s^2\} = \{1, 0\}$、$\{P, Q\} = \{a^2, b^2\}$ である。このとき $y = |a| + |b|$ である（$\sqrt{a^2} = |a|$ であることに注意）。
- n が奇数のとき、$\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ であるから $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$、$P = Q = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ である。このとき $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$ である。

停留点の種類。 θ が増加しながら $\frac{1}{2}k\pi$ を通過するとき、$\sin 4\theta$ は負から正に変わるので、y は減少から増加に転じる。よってこれらの点は**極小**（minimum）である。θ が増加しながら $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ を通過するとき、$\sin 4\theta$ は正から負に変わるので、これらの点は**極大**（maximum）である。

下の図は $a = 2$、$b = 1$ の場合を、縦軸方向を拡大して描いたものである。y は 3 と $\sqrt{10} \approx 3.162$ の間を周期 $\frac{1}{2}\pi$ で振動する。



最後の不等式

θ を $\theta + \frac{1}{2}\pi$ に置き換えると c^2 と s^2 が入れ替わり、したがって P と Q が入れ替わるので、y は周期（period）$\frac{1}{2}\pi$ をもつ。1 周期 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ において、y は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ で増加し $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ で減少する（$\sin 4\theta$ の符号による）。よって最小値は両端でとる $|a| + |b|$、最大値は $\frac{1}{4}\pi$ でとる $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ である。周期性より、これらはすべての θ に対する最小値と最大値でもあるから

$$|a| + |b| \ \leq \ y \ \leq \ \sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

この 2 つの評価は矛盾しない。最初の小問を $|a|$ と $|b|$ に適用すると $(|a| + |b|)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ が得られるので、下界は確かに上界を超えない。

脇に置いた場合。 $a^2 = b^2$ ならば $y = 2|a|$ であり、一方 $|a| + |b| = 2|a|$、$\sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$ であるから、不等式はすべて等号で成り立つ。$b = 0$ ならば $y = |a|(|\cos\theta| + |\sin\theta|)$ である。各項は 1 以下であるから $|\cos\theta| + |\sin\theta| \geq \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ であり、また最初の小問より $(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^2 \leq 2$ である。よって $|a| \leq y \leq \sqrt{2}\,|a|$ となり、これは求める不等式である。$a = 0$ の場合は a と b を入れ替えれば同様であり、$a = b = 0$ の場合は自明である。以上により、すべての a、b、θ に対して結果が証明された。 ■

検算

- $a = 2$、$b = 1$ のとき、$y(0) = 2 + 1 = 3$、$y(\frac{1}{4}\pi) = 2\sqrt{5/2} = \sqrt{10} \approx 3.1623$ である。多数の θ について y を数値的に調べても、値はこの 2 つの間に収まる。

- 導関数の式は、無作為に選んだ a、b、θ において、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の差分近似（finite-difference estimate）と約 10^{-9} の精度で一致する。
- $a = b$ のとき両方の評価は $2|a|$ に一致し、定数である y と合致する。

よくある間違い

- $\sqrt{a^2} = a$ と書いてしまうこと。最小値は $|a| + |b|$ であり、答えに絶対値（modulus）が現れるのはこのためである。
- $\sin 2\theta = 0$ で止まってしまい、$\sqrt{P} = \sqrt{Q}$ となる $\frac{1}{4}\pi$ の奇数倍の点にある停留点を見落とすこと。
- 根拠を示さずに極大や極小と判定すること。$\sin 4\theta$ の符号を使えば 1 行で根拠が示せる。

STEP のその先へ

幾何学的には、$\sqrt{P}$ は楕円（ellipse）$x = a\cos\phi$、$y = b\sin\phi$ の中心からその上の点までの距離であり、$\sqrt{Q}$ はパラメータを 4 分の 1 周だけ進めた点までの距離である。したがってこの問題は、これら 2 つの「共役」半径（conjugate radii）が一定の総量 $a^2 + b^2$ をどのように分け合うかを問うている。また 2 つの評価は、ベクトル (a, b) の ℓ^1 ノルム（norm）と（定数倍した）ℓ^2 ノルムでもあり、このようにノルムを比較することは大学 1 年次の解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）で日常的に使われる道具である。導関数を用いて不等式を証明する方法についてさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。