解答例

STEP I 2002、第 2 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP I 2002、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

鍵となる考え方

多項式（polynomial）$x^m(x-1)^n$ は $x=0$ と $x=1$ で値が零になるので、その間のどこかで増減が入れ替わらなければならない。積の微分法（product rule）で微分し、**共通因数をすべてくくり出す**。すると導関数は、符号がすぐに読み取れる単純な因数に分かれる。グラフの概形全体を支配するのは偶奇（parity）である。べき指数が偶数か奇数かによって、曲線が軸に接するのか軸を横切るのか、そして軸のどちら側にあるのかが決まる。

解答

停留点

積の微分法により、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[m(x-1)+nx] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[(m+n)x-m]. \end{aligned}$$

よって $\mathrm{f}'(x)=0$ となるのは、ちょうど $x=0$、$x=1$、または

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

のときである。$m,n>0$ より $0<m<m+n$ であるから、$0<x_0<1$ となる。これが求める停留点（stationary point）である。（$m,n\geq 2$ なので、べき指数 $m-1$ と $n-1$ は 1 以上であり、$x=0$ と $x=1$ も停留点である。これはグラフをかくときに必要になる。）

停留点の種類

$g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$、$h(x) = (m+n)x - m$ とおいて、$\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$ と書く。すると

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

考えてみよう g を本当にすべて微分する必要があるだろうか？

その必要はない。x_0 では $h(x_0) = 0$ であるから、g' が何であっても第 1 項は消える：

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

ここで $m+n > 0$ かつ $x_0^{m-1} > 0$ であるが、$x_0 - 1 < 0$ である。よって $\mathrm{f}''(x_0)$ は零ではなく、その符号は $(-1)^{n-1}$ の符号に等しい：

- n が偶数ならば $n-1$ は奇数であり、$\mathrm{f}''(x_0) < 0$ となって x_0 は**極大**（maximum）である；
- n が奇数ならば $n-1$ は偶数であり、$\mathrm{f}''(x_0) > 0$ となって x_0 は**極小**（minimum）である。

$\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$ であるから、第 2 次導関数判定法（second-derivative test）で結論が確定する。これが示すべきことであった。

グラフの概形

4 つの場合は m と n の偶奇によって分かれる。それぞれの概形をかくために、次の事実をまとめておく。

f の符号。 $x > 1$ では両方の因数が正であるから、$\mathrm{f} > 0$ である。$0 < x < 1$ では $x^m > 0$ であり、$(x-1)^n$ の符号は $(-1)^n$ の符号に等しい。$x < 0$ では、符号は $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$ である。

根の近くでのふるまい。 $x = 0$ の近くでは $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$ である。m が偶数ならば、f は 0 の両側で同じ符号をとるので、曲線はそこで軸に接する（転回点（turning point））。m が奇数ならば f は符号を変え、しかも $\mathrm{f}'(0) = 0$ であるから、曲線は軸を水平に横切る（停留変曲点（stationary point of inflection））。$x = 1$ においても、n について同じ議論が成り立つ。

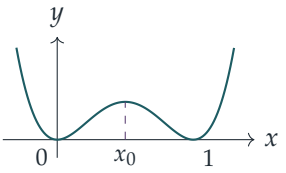
両端。 $|x|$ が大きいとき $\mathrm{f}(x)$ は x^{m+n} のようにふるまうので、$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f} \to +\infty$ である。$x \to -\infty$ のときは、$m+n$ が偶数ならば $\mathrm{f} \to +\infty$、$m+n$ が奇数ならば $\mathrm{f} \to -\infty$ である。

ほかに停留点はない。 停留点は $x = 0$、x_0、$x = 1$ のみである。

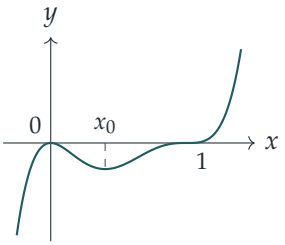
これらを合わせると：

- m **が偶数、**n **が偶数：**いたるところで $f \geq 0$ である。0 と 1 で軸上に極小をもち、x_0 で極大をもつ。W 字形になる。
- m **が偶数、**n **が奇数：**曲線は $-\infty$ から上昇して 0 で下から軸に接し（極大）、x_0 の極小まで下降し、その後 1 で停留変曲点を通過して上昇し、$+\infty$ へ向かう。
- m **が奇数、**n **が偶数：**曲線は $-\infty$ から上昇して 0 で停留変曲点を通過し、x_0 の極大に至り、下降して 1 で軸に接し（極小）、その後上昇して $+\infty$ へ向かう。
- m **が奇数、**n **が奇数：**曲線は $+\infty$ から下降して 0 で停留変曲点を通過し、x_0 の極小に至り、再び上昇して 1 で停留変曲点を通過し、$+\infty$ へ向かう。

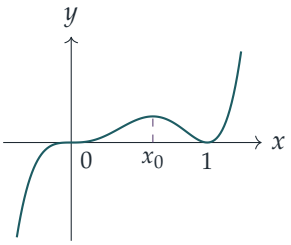
下の図は最も小さい場合 $(m,n) = (2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$ を用いており、縦軸の縮尺はそれぞれ異なる。x_0 における値は小さく、$\frac{1}{16}$、$-\frac{108}{3125}$、$\frac{108}{3125}$、$-\frac{1}{64}$ である。



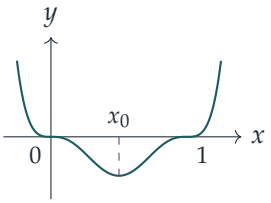
m が偶数、n が偶数



m が偶数、n が奇数



m が奇数、n が偶数



m が奇数、n が奇数

検算

- $m = n = 2$ とすると、$f(x) = \big(x(x-1)\big)^2$ は $x = \frac{1}{2}$ に関して対称であり、$x_0 = \frac{1}{2}$ は確かに極大で、その値は $\frac{1}{16}$ である。
- 置換 $x \mapsto 1-x$ により、$x^m(x-1)^n$ は $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$ に変わる。よって m と n を入れ替えると、グラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して折り返される（$m+n$ が奇数なら

ば、さらに x 軸に関しても折り返される）。偶奇の異なる 2 つの場合の概形が互いに鏡像になっているのはこのためである。

- $2 \le m, n \le 8$ のすべてについて、f' を数値微分と、$\mathrm{f}''(x_0)$ の符号を差分と照合した。たとえば $(m,n) = (2,3)$ のとき、$\mathrm{f}''(\frac{2}{5}) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$ であり、予想どおり極小である。

よくある間違い

- $\mathrm{f}''(x)$ をすべて展開してしまう。x_0 では因数 $(m+n)x - m$ が零になるので、残るのは 1 つの項だけである。
- $x = 0$ と $x = 1$ も停留点であること（$m, n \ge 2$ だから）を忘れ、そこで曲線が軸を斜めに横切るようにかいてしまう。
- $x < 0$ での符号を間違える。符号は $m + n$ によって決まり、m だけでは決まらない。

STEP のその先へ

重複度（multiplicity）k の根の近くでは、多項式の局所的な形は $c(x-a)^k$ のようになり、k の偶奇によって接するか横切るかが決まる。これはテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）と、停留点に対する高階導関数判定法（higher-derivative test）への第一歩である。すなわち、停留点において最初に零でない導関数の階数が k であるとき、k が偶数ならばその点は転回点であり、k が奇数ならば変曲点（inflection）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、これらの考え方を厳密な基礎の上に据えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。