解答例

STEP I 2002、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き期待値

> **STEP I 2002、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q13

鍵となる考え方

組 (U, V) としてありうるものは 6 通りしかないので、すべては同時確率（joint probability）の小さな表と、各場合についてのちょっとした代数に帰着する。2 次方程式については、U^2 が高々 1 であるため、V の符号だけですべてが決まる。3 次方程式については、係数が U と V を使って妙に入り組んだ形をしている。これは因数分解（factorisation）できることを強く示唆しており、実際に因数分解できれば根はそのまま読み取れる。

解答

まず同時分布（joint distribution）を作る。$\mathrm{P}(U = u, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$ であり、各 u について $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$ であるから、

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

となる。6 つの値の和は、当然そうあるべきとおり 1 である。

小問 (i)

$x^2 + Ux + V = 0$ の 2 つの根がともに実数となるのは、判別式（discriminant）が非負、すなわち $U^2 - 4V \geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。

▶ $V = -1$ ならば、判別式は $U^2 + 4 > 0$ であるから、U が何であっても根は実数（し

かも相異なる）である。

- $V = 1$ ならば、$U^2 \leq 1$ であるから判別式は $U^2 - 4 \leq 1 - 4 < 0$ となる。よって根が実数になることはない。

したがって、2 つの根がともに実数となるのは $V = -1$ のとき、かつそのときに限り、

$$\mathrm{P}(\text{2 つの根がともに実数}) = \mathrm{P}(V = -1) = \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{4+3+2}{18} = \tfrac{1}{2},$$

となって、示すべきことが示された。

小問 (ii)

小問 (i) より、「2 つの根がともに実数」という条件で条件付けることは、$V = -1$ で条件付けることと同じである。表の下の行を $\mathrm{P}(V = -1) = \frac{1}{2}$ で割ると、条件付き確率（conditional probability）

$$\mathrm{P}(U = 1 \mid V = -1) = \tfrac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}(U = 0 \mid V = -1) = \tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(U = -1 \mid V = -1) = \tfrac{2}{9}.$$

が得られる。

? **考えてみよう** なぜここで単に $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$ を使ってはいけないのだろうか。

U と V は独立（independent）ではないからである。$V = -1$ であることがわかると、$U = 1$ である可能性が高まる（$U = 1$ のとき $V = -1$ となる確率は $\frac{2}{3}$ だからである）。求めたい期待値は条件付きのものなので、重みは条件付き確率でなければならない。

$V = -1$ のとき方程式は $x^2 + Ux - 1 = 0$ であり、その大きい方の根は

$$R = \frac{-U + \sqrt{U^2 + 4}}{2}.$$

である。よって $U = 1$ のとき $R = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$、$U = 0$ のとき $R = 1$、$U = -1$ のとき $R = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(R \mid \text{根が実数}) &= \tfrac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\
&= \frac{4\sqrt{5} - 4 + 6 + 2\sqrt{5} + 2}{18} \\
&= \frac{6\sqrt{5} + 4}{18} = \frac{3\sqrt{5} + 2}{9}.
\end{aligned}$$

小問 (iii)

定数項が U であることから、因数 $(x+U)$ があるのではないかと考えられる。実際、

$$\begin{aligned}(x+U)(x^2-2Vx+1) &= x^3-2Vx^2+x+Ux^2-2UVx+U\\ &= x^3+(U-2V)x^2+(1-2UV)x+U,\end{aligned}$$

となり、これは与えられた 3 次式そのものである。よって根は $x=-U$ と、$x^2-2Vx+1=0$ の根である。$V=\pm1$ より $V^2=1$ であるから、この 2 次方程式の判別式は $4V^2-4=0$ である。よって重根（repeated root）$x=V$ をもち、3 次方程式は

$$(x+U)(x-V)^2=0,$$

となって、根は $-U$、V、V である。

3 つの根がすべて正となるのは、$-U>0$ かつ $V>0$、すなわち $U=-1$ かつ $V=1$ のとき、かつそのときに限る。（$U=0$ のときは根の 1 つが 0 となり、これは正ではない。）表より、

$$\mathrm{P}(\text{すべての根が正})=\mathrm{P}(U=-1,\,V=1)=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{9}.$$

検算

- 条件付き確率 $\frac{4}{9},\frac{1}{3},\frac{2}{9}$ の和は 1 である。
- (ii) の答えは約 0.967 である。これは大きい方の根としてありうる最小の値 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx0.618$ と最大の値 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\approx1.618$ の間になければならず、さらに最も小さい根が最も大きい重みをもつので、中央の値 1 より小さくなるはずである。実際そうなっている。
- (iii) で $U=-1$、$V=1$ とすると、3 次式は $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ となり、根は 1, 1, 1 ですべて正である。$U=1$、$V=1$ とすると $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ となり、負の根 -1 をもつ。
- 3 つの答えはすべて、6 通りの場合を分数で厳密に数え上げることと、各場合について 3 次方程式の根を数値的に求めることによって確認した。

よくある間違い

- (ii) で条件なしの重み $\frac{1}{3}$ を使ってしまうこと。この場合、答えは $\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\approx1.079$ となってしまう。
- (iii) で $U=0$ を数えてしまうこと。根 0 は正ではない。

- 因数分解を探さずに、判別式や符号の変化を使って 3 次方程式を解析しようとすること。

STEP のその先へ

この問題の核心は条件付き期待値（conditional expectation）$\mathrm{E}(X \mid A)$ であり、これは条件付き確率で重みをつけ直すことによって計算される。大学では、この考え方は、それ自体が 1 つの確率変数（random variable）である条件付き期待値 $\mathrm{E}(X \mid Y)$ へと発展し、さらに塔の法則（tower law）$\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid Y)\big) = \mathrm{E}(X)$ へとつながる。この法則によって、多くの難しい期待値の計算が易しくなる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この内容をわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。