解答例

STEP I 2002、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP I 2002、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s1-q12

鍵となる考え方

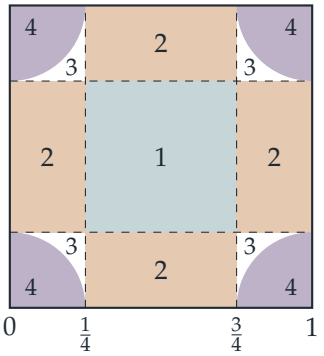
格子は同じ形の繰り返しなので、「蹄を無作為に置く」とは、蹄の中心が 1 つの単位正方形上に一様分布（uniformly distributed）することにほかならない。蹄が何個の正方形にかかるかは、中心がその正方形の辺や頂点にどれだけ近いかだけで決まる。したがって各答えは正方形内のある領域に対応し、その確率（probability）はその領域の面積である。4 つの確率が求まれば、あとはそれらとその平均を、ハリーが実際に出した答えと比べればよい。

解答

ハリーの答えの分布

蹄の中心 C が単位正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 内にあるとする。ハリーが蹄を無作為に置くならば、格子の周期性（periodicity）により C はこの正方形上に一様分布する。よって C がある領域に入る確率はその領域の面積に等しい。一部でも覆われる正方形の個数を N とする。

蹄の半径は $\frac{1}{4}$ で、これは $\frac{1}{2}$ より小さいので、蹄がまたぐ縦の格子線は高々 1 本、横の格子線も高々 1 本である。蹄が縦の線をまたぐのは $x < \frac{1}{4}$ または $x > \frac{3}{4}$ のときであり、またそのときに限る。横の線をまたぐのは $y < \frac{1}{4}$ または $y > \frac{3}{4}$ のときであり、またそのときに限る。（線からの距離がちょうど $\frac{1}{4}$ となる位置の集合は面積が 0 なので、無視してよい。）



事象「縦の線をまたぐ」と「横の線をまたぐ」の確率はいずれも $\frac{1}{2}$ であり、x と y は互いに独立な一様座標なので、この 2 つの事象は独立（independent）である。よって次のようになる。

- 蹄がどの線もまたがないとき $N=1$ である。このとき C は 1 辺 $\frac{1}{2}$ の中央の正方形内にあるので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ である。
- ちょうど 1 本の線をまたぐとき $N=2$ であり、$\mathrm{P}(N=2)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ である。
- 縦横それぞれ 1 本ずつの線をまたぐとき、C は 1 辺 $\frac{1}{4}$ の 4 つの隅の正方形のいずれかにあり、その確率の合計は $\frac{1}{4}$ である。2 本の線は格子の頂点で交わり、蹄がその頂点のまわりの 4 つの正方形すべてに一部でもかかるのは、蹄がその頂点自体を覆うとき、かつそのときに限る。

考えてみよう 隅の正方形において、答えが格子の頂点までの距離で決まるのはなぜか。

原点に最も近い隅の正方形、すなわち $0<x<\frac{1}{4}$ かつ $0<y<\frac{1}{4}$ の部分を考える。蹄は C を含む正方形、その左隣の正方形、その下の正方形には必ずかかる。対角方向の正方形 $x<0, y<0$ の中で C に最も近い点は原点であり、C からの距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ である。したがって蹄がこの正方形にかかるのは $\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{4}$ のとき、かつそのときに限る。よって C が格子の頂点から $\frac{1}{4}$ 以内にあれば $N=4$、そうでなければ $N=3$ である。

単位正方形の点のうち、その頂点のいずれかから $\frac{1}{4}$ 以内にあるものは、半径 $\frac{1}{4}$ の 4 つの四分円をなし、その面積の合計は $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$ である。ゆえに

$$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{4},\qquad \mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(N=3)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16},\qquad \mathrm{P}(N=4)=\frac{\pi}{16}.$$

これまでの証拠は無作為な馬と矛盾しないか

正しい答えが $4 \div 4 = 1$ のとき、無作為な馬が正解する確率は $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$ である。正しい答えが $2 + 2 = 4$ のとき、正解する確率は $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$ である。これらは観測された正答率とちょうど一致する。したがって、証拠は「ハリーは単に蹄を無作為に置いているだけだ」という私の疑いとまったく矛盾しない。

答えの期待値と新しい馬

ハリーが蹄を無作為に置くならば、その答えは問題に依存しないので、答えの期待値（expected value）は単に $\mathrm{E}(N)$ である（正しい答えが同じ頻度で現れることは関係しない）。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4 \cdot \tfrac{\pi}{16} \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16} \\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

観測された平均 2 を、2 つの仮説と比べてみる。

- **ハリーが正しく計算している場合。** 正しい答えは $1, 2, 3, 4$ が同じ頻度で現れるので、平均は $\frac{5}{2}$ になるはずである。平均 2 はこれをかなり下回っているので、ハリーは確実に多くの問題で間違えている。実際、1 つの誤答が真の値を下回る量は高々 3 であり、平均の不足分は $\frac{1}{2}$ なので、少なくとも $\frac{1}{6}$ の答えは間違っていなければならない。
- **ハリーが無作為な場合。** 平均は $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$ に近くなるはずである。1 回の答えの分散（variance）は $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$ なので、n 問にわたる平均の標準偏差（standard deviation）はおよそ $1.02/\sqrt{n}$ である。「多くの」問題（たとえば $n = 400$ とすると標準偏差はおよそ 0.05）では、平均 2 は期待値より標準偏差の約 4 倍も低く、偶然そうなることはきわめて考えにくい。

したがって、多くの問題にわたる平均 2 は、蹄を無作為に置く馬にとってさえ低すぎる。ハリーは、軽く踏んでいるのか、正方形の中央を狙っているのか、小さな答えを好む傾向があるようだ。いずれにせよ、ハリーは計算などしておらず、無作為な馬よりも成績が悪い。そう、新しい馬を迎えるときである（ただし、できれば算数のできる馬を）。

検算

- 4 つの確率の和は $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{16}=1$ となり、また $\mathrm{P}(N=3)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}\approx 0.054$ は当然ながら正である。
- 蹄を無作為に 400 000 回置き、中心から距離 $\frac{1}{4}$ 以内にある正方形を数えるシミュレーションを行うと、相対度数（relative frequency）は 0.2495, 0.4990, 0.0547, 0.1968、平均は 2.199 となった。理論値は $2+\frac{\pi}{16}\approx 2.196$ である。
- 妥当性の確認：蹄がごく小さければ答えはほとんど常に 1 となり、平均は 1 に近づく。蹄が大きいほど答えは大きくなり、今回の値はその中間にある。

よくある間違い

- 蹄が 2 本の格子線をまたげば必ず 4 つの正方形にかかると思い込むこと。実際には 2 本の線が交わる頂点まで届く必要があり、これが π が現れる理由である。
- 平均 2 が「2.5 より小さい」ことを無作為性の証拠とみなすこと。無作為な場合に予測される値は約 2.2 なので、平均のばらつきも考慮したうえで、その値と比較しなければならない。

STEP のその先へ

これは**幾何的確率**（geometric probability）の問題である。点がある領域上に一様に分布するとき、確率は面積で表される。同じ考え方からビュフォンの針（Buffon's needle）の問題も解け、その答えにもやはり π が現れることはよく知られている。最後の部分は仮説検定（hypothesis testing）の初歩であり、中心極限定理（central limit theorem）を用いて、観測された平均がモデルのもとでありうるものかどうかを判断している。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続一様分布と、この種の議論の背後にある極限定理の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。