解答例

STEP I 2002、第 11 問

力学 ・ 斜め弾性衝突

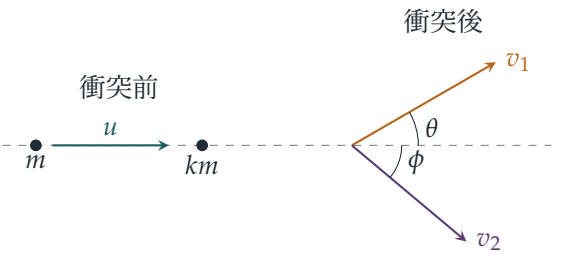
> **STEP I 2002、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q11

鍵となる考え方

衝突からは 2 つの保存則が得られる。運動量（momentum）の保存（運動量はベクトルなので、成分ごとに 2 本の方程式になる）と、エネルギーが失われないことによる運動エネルギー（kinetic energy）の保存である。2 本の運動量の方程式は衝突後の未知の速さについて線形であるから、これらを解いて速さを角度で表すことができる。それをエネルギーの方程式に代入すれば速さはすべて消え、角度と k だけの関係式が残る。

解答

P_1 と P_2 を平面内を運動する質点（particle）としてモデル化し、衝突の間には外力がはたらかないものとする。P_1 が速さ $u > 0$ で x 軸に沿って近づくとし、衝突後の速さを v_1（P_1 の速さで、軸の上側に角 θ の向き）と v_2（P_2 の速さで、軸の下側に角 ϕ の向き）とする。ただし $0 < \theta < \pi$ かつ $0 < \phi < \pi$ である。



恒等式

もとの運動の方向とそれに垂直な方向について運動量保存則を用いると、（m を約して）

$$v_1\cos\theta + kv_2\cos\phi = u,$$
$$v_1\sin\theta - kv_2\sin\phi = 0,$$

を得る。ここで負号がつくのは、P_2 が軸の反対側へ動いていくからである。運動エネルギー保存則からは、$\frac{1}{2}m$ を約して

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

を得る。

運動量の方程式は、2 つの未知数 v_1 と kv_2 についての 2 本の線形方程式である。第 1 式に $\sin\phi$ を、第 2 式に $\cos\phi$ を掛けて加えると、kv_2 の項が消えて

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{よって} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

となる。同様に、第 1 式に $\sin\theta$ を、第 2 式に $\cos\theta$ を掛けて引くと

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

を得る。

考えてみよう $\sin(\theta+\phi)$ で割ってよいのだろうか。

$\theta+\phi \neq \pi$ であることが必要である（この和は 0 より大きく 2π より小さい）。もし $\theta+\phi=\pi$ ならば、$\sin\phi = \sin\theta$ かつ $\cos\phi = -\cos\theta$ である。すると第 2 の運動量の方程式は $(v_1 - kv_2)\sin\theta = 0$ となり、$\sin\theta \neq 0$ であるから $v_1 = kv_2$ である。このとき第 1 式は $(v_1 - kv_2)\cos\theta = u$ となり、$0 = u$ が得られるが、これは不可能である。したがって $\sin(\theta+\phi) \neq 0$ であり、割り算は問題ない。

次に、kv_2^2 を $(kv_2)^2/k$ と書いて $(*)$ に代入すると

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

となる。両辺に $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$（これは 0 でない）を掛けると

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

となり、示すべき式が得られた。

（幾何学的には、運動量の方程式は、運動量 mv_1、kmv_2、mu が角 ϕ、θ、$\pi-(\theta+\phi)$ をもつ三角形をなすことを述べており、上の 2 つの式はその三角形における正弦定理（sine rule）にほかならない。）

経路が直角をなす場合

経路が直角をなすならば $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$ であるから、$\sin^2(\theta+\phi)=1$ かつ $\sin\theta=\cos\phi$ である。恒等式は

$$\cos^2\phi+k\sin^2\phi=k, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos^2\phi=k(1-\sin^2\phi)=k\cos^2\phi.$$

となる。ここで $\cos\phi\neq 0$ である。そうでなければ $\phi=\frac{\pi}{2}$ となり、すると $\theta=0$ となるが、問題文により θ は 0 でないからである。$\cos^2\phi$ で割ると $k=1$ が得られ、示すべきことが示された。

検算

- スヌーカーでおなじみの事実として、等しい質量の物体が、一方が静止している状態で弾性衝突（elastic collision）すると、両者は直角をなす方向に動いていく。ここで得た結果はその逆（converse）である。
- 数値例：$k=2$、$\phi=30^\circ$ とする。その直線に沿ったなめらかな弾性衝突により、P_2 は速さ $\frac{2}{3}u\cos 30^\circ$ で動き出し、P_1 は $\theta=90^\circ$ の向きに動く。恒等式の両辺はともに $\frac{3}{2}$ に等しい。
- さらに、2×10^5 回のランダムな弾性衝突（k、u、衝突の方向をランダムに選んだもの）をシミュレーションした。恒等式および v_1 と kv_2 の 2 つの公式は、誤差 10^{-12} 以内で成り立った。

よくある間違い

- 垂直方向の運動量の方程式を $v_1\sin\theta+kv_2\sin\phi=0$ と書いてしまうこと。2 つの質点は互いに反対側へ動いていくので、成分の符号は逆になる。
- エネルギーの方程式の k を書き忘れること、あるいは最後の段階で $\cos\phi\neq 0$ である理由を述べ忘れること。

STEP のその先へ

重心（centre of mass）とともに動く座標系では、弾性衝突は 2 つの速度の大きさを保ったまま向きを回転させるだけである。ここで現れた角度の関係はすべて、起こりうる結果がなすこの円を実験室系（laboratory frame）に写し戻すことから得られる。この見方は、ビリヤードの球から素粒子物理学まで、散乱（scattering）を扱う標準的な方法である。素粒子物理学では、測定された散乱角を用いて衝突する粒子の質量比を

求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系による衝突の扱いを丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。