解答例

STEP I 2002、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2002、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q10

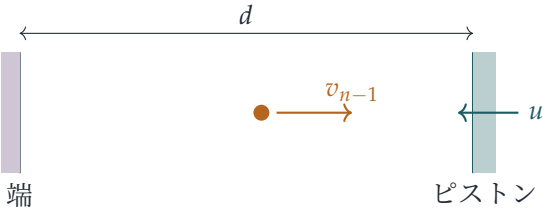
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.4 節「**分子とピストン**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/piston.html

鍵となる考え方

粒子よりはるかに重い壁との完全弾性衝突（perfectly elastic collision）では**相対速度**（relative velocity）が反転するので、ピストン（piston）の座標系で考えるのが最も簡単である。その座標系では、粒子は静止した壁で単に跳ね返るだけである。したがって、ピストンで跳ね返るたびに速さは $2u$ だけ増え、固定された端で跳ね返っても何も変わらない。距離については、ピストンとの 2 回の衝突の間に粒子とピストンが合わせて一定の型の長さを進むことに注目すると、d_{n+1} を d_n で表す 1 次方程式が 1 つ得られる。

解答

空気を粒子、ピストンを衝突の影響を受けずに一定の速さ u で動く壁、シリンダーの端を固定された壁としてモデル化する。運動はすべて軸に沿っているので、シリンダーの端からピストンへ向かう向きを正とする。



速さ

粒子が速さ w でピストンに近づくとする。ピストンの速度は $-u$ なので、ピストンに対する粒子の相対速度は（ピストンへ向かって）$w+u$ である。はね返されない壁との完全弾性衝突では、$e=1$ としたニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）により相対速度が反転するので、衝突後のピストンに対する粒子の相対速度は $-(w+u)$ となる。このとき実際の速度は

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

であるから、粒子は速さ $w+2u$ でピストンから離れる。

シリンダーの固定された端では、壁が静止しているので同じ法則により速度が反転するだけであり、速さは変わらない。したがって、ピストンとの連続する衝突の間、粒子の速さは一定のままである。

最初の衝突の前、粒子は速さ v でピストンへ向かって動いているので、$v_1=v+2u$ である。n 回目の衝突の直後、粒子の速さは v_n である。粒子は速さを変えずに端で跳ね返り、速さ v_n で再びピストンに出会い、$v_{n+1}=v_n+2u$ で離れる。数学的帰納法（induction）により

$$v_n=v+2nu,$$

となり、示すべき式が得られた。

距離

n 回目と $(n+1)$ 回目の衝突の間（時間 t_n）に、ピストンは速さ u で内側へ動くので

$$d_n-d_{n+1}=u\,t_n.$$

同じ時間に、一定の速さ v_n で動く粒子は、ピストンから端まで（端はピストンがあった位置から d_n の距離にあるので、距離 d_n）進み、そしてピストンまで戻る（ピストンの現在の位置までなので、距離 d_{n+1}）。したがって

$$d_n+d_{n+1}=v_nt_n.$$

考えてみよう t_n はどうすれば消去できるだろうか？

一方の式を他方の式で割る。$t_n>0$ であるから

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}}=\frac{v_n}{u}.$$

分母を払うと $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$ となるので

$$(v_n+u)\,d_{n+1}=(v_n-u)\,d_n.$$

$v_n = v + 2nu$ より $v_n - u = v + (2n-1)u$、$v_n + u = v + (2n+1)u$ であるから

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n,$$

となり、示すべき結果が得られた。

d_n の式

漸化式（recurrence）を繰り返し用いると

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v + (2k-1)u}{v + (2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v + (2n-3)u}{v + (2n-1)u}.$$

この積は次々に打ち消し合う（telescope）。各分母が次の分子と約分され、

$$d_n = \frac{v+u}{v + (2n-1)u}\, d_1.$$

が残る。これは $n = 1$ のときも成り立ち、そのときは $d_1 = d_1$ となる。

$v = u$ の場合

$v = u$ とおくと

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

すると、$ut_n = d_n - d_{n+1}$ より

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $u = 0$ のとき、ピストンは固定された壁である。式からすべての n について $v_n = v$、$d_n = d_1$ が得られ、当然そうなるべき結果と一致する。
- $u = 1$、$v = 3$、$d_1 = 75$ とする。式から $d_2 = 50$、$d_3 = 37.5$、$d_4 = 30$、速さ $5, 7, 9, 11$ が予測される。跳ね返りを（有理数演算で）1 段階ずつ厳密にシミュレーションすると、まさにこれらの値が得られ、u、v および初期位置を無作為に 200 通り選んでも同様に一致する。
- $v = u$ のとき、$\sum ut_n = d_1 \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$ である。すなわち、ピストンは合計でちょうど d_1 進んでシリンダーの端に達し、これは $d_n = d_1/n \to 0$ と矛盾しない。

よくある間違い

- $d_n - d_{n+1}$ の使い方を誤ること。たとえば粒子の往復距離を $2d_n$ としてしまう誤りである。その間にピストンは動いているので、帰りの距離は d_{n+1} にすぎない。
- 1 回の衝突ごとに $2u$ ではなく u を加えてしまうこと。相対速度が反転するので、粒子の速度の変化は、ピストンによって加わる接近の速さの 2 倍になる。

STEP のその先へ

1 回の衝突ごとに粒子の速さは一定量だけ変化するが、隙間が狭まるにつれて衝突の頻度は増し、n が大きいとき積 $v_n d_n$ はほぼ一定に保たれる（ここでは n が大きいとき $v_n d_n \approx (v+u)d_1$）。このようにゆっくり変化する保存量を**断熱不変量**（adiabatic invariant）という。多数の分子について平均をとると、これによって気体を急速に圧縮すると温まる理由が説明される。1 次元でゆっくり圧縮する場合、$T \propto 1/L^2$ となる。衝突と座標系について次に学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。