解答例

STEP I 2002、第 1 問

純粋数学 ・ 円と楕円

> **STEP I 2002、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q1

鍵となる考え方

まず、2 つの楕円（ellipse）が実際にどこで交わるかを求める。どちらの方程式も y を y^2 の形でしか含まないので、y^2 を消去すると x の 2 次方程式（quadratic equation）が残る。その結果、2 つの楕円はちょうど 2 つの実の点で交わることがわかる。与えられた 2 点を通る円の中心はその 2 点の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあり、これによって円の方程式は 1 パラメータの族（one-parameter family）に絞り込まれる。

解答

交点を求める

展開すると、2 つの楕円は

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

となる。第 1 式を 8 倍して第 2 式を引くと、y^2 が消える：

$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 50x + 96 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-48) = 0.$$

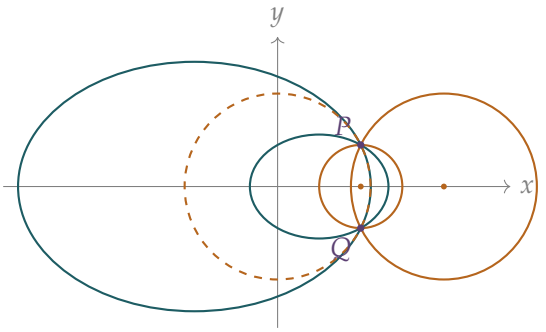
考えてみよう なぜ両方の解をそのまま採用してはいけないのか？

それぞれの解について、y が実数になるかを確かめなければならない。第 1 の楕円より、$2y^2 = 14 - x^2 - 4x$ である。

- $x = 48$：$2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$ となるので、実の点は存在しない。（そもそも第 1 の楕円は $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$ の範囲にしかない。）

▶ $x = 2$：$2y^2 = 14 - 4 - 8 = 2$ となるので、$y = \pm 1$ である。

したがって、2 つの楕円はちょうど 2 点 $P = (2, 1)$ と $Q = (2, -1)$ で交わる。（どちらも第 2 の方程式も満たす：$9 + 16 = 25$。）



図は、2 つの楕円（ティール）と、P と Q を通る円のうち中心が $(0, 0)$、$(2, 0)$、$(4, 0)$ である 3 つの円（アンバー）を示している。

P と Q を通る円

P と Q を通る任意の円の中心は 2 点から等距離にあるので、PQ の垂直二等分線上にある。線分 PQ は鉛直で、中点は $(2, 0)$ であるから、その垂直二等分線は x 軸である。よって、中心はある実数 a を用いて $(a, 0)$ と表され、半径は

$$r^2 = (2 - a)^2 + 1^2.$$

で与えられる。したがって円の方程式は

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 &= (2 - a)^2 + 1\\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= 4 - 4a + a^2 + 1\\ x^2 - 2ax + y^2 &= 5 - 4a,\end{aligned}$$

となり、これが求める形である。

逆に、任意の実数 a に対してこの方程式は中心 $(a, 0)$、半径 $\sqrt{(a-2)^2 + 1} > 0$ の真の円を表し、$4 - 4a + 1 = 5 - 4a$ であるから $(2, \pm 1)$ を通る。よって、この族は交点を通る円全体のなす集合とちょうど一致する。

考えてみよう 2 つの方程式の 1 次結合をとるという、よく使う手法ではどうなるのか？

$7\times$（第 1 式）$-$（第 2 式）という結合をとると x^2 と y^2 の係数が等しくなり、$x^2 - 23x + y^2 + 41 = 0$ が得られる。これは我々の族の $a = \frac{23}{2}$ の場合である。しかし、これは 1 つ

の円にすぎない。2 つの方程式の 1 次結合は、4 つの（複素数の）共有点すべてを通る円錐曲線（conic）を表す。その中には $x = 48$ をもつ 2 つの非実の点も含まれる。一方、円は 2 つの実の点さえ通ればよい。これが、ここで直接的な方法が必要となる理由である。

検算

- $a = 2$ とすると $x^2 - 4x + y^2 = -3$、すなわち $(x-2)^2 + y^2 = 1$ となる。これは PQ を直径とする円であり、期待どおりである。
- $a = 0$ とすると $x^2 + y^2 = 5$ となり、実際 $2^2 + 1^2 = 5$ である。
- $-6 \leq x \leq 6$ の範囲で両方の楕円上にある点を数値的に探索すると、$x = 2$ しか見つからない。$(2,1)$ における楕円の法線（normal）はそれぞれ $(8,4)$ と $(18,32)$ の方向であり、これらは平行でないので、2 つの楕円はそこで接しているのではなく、確かに交差している。

よくある間違い

- y が実数になるかを確かめずに $x = 48$ を残してしまう。
- 楕円の方程式の 1 次結合から 1 つの円を求めただけで終わりにしてしまう。問題は交点を通る**任意の**円について問うている。

STEP のその先へ

2 つの円錐曲線の結合 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$ は**束**（pencil）と呼ばれる。これは、複素射影平面（complex projective plane）において数えた 4 つの共有点を通る円錐曲線全体からなる。この問題は、それらの点の一部が非実である場合があること、そして円が特別な存在であること（すべての円は、2 つの固定された複素の「無限遠円点」（circular points at infinity）を通る）を、うまく思い出させてくれる。これらの考え方は射影幾何学（projective geometry）と代数幾何学（algebraic geometry）に属する。この観点から平面曲線や円錐曲線を親しみやすく紹介した入門書として Reid の *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何学）があり、また Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。