解答例

STEP III 2001、第 9 問

力学 ・ 摩擦と単振動

STEP III 2001、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q9

鍵となる考え方

2 本の梁は水平と角 α をなす直線に沿って d だけ離れているので、板は角 α で傾いて置かれる。板が滑るにつれて、その重さの負担は B_1 から B_2 へ移っていき、2 つの垂直抗力（normal reaction）は重心（centre of gravity）の位置に対して線形に変化する。2 つの摩擦係数（coefficient of friction）が異なるので、摩擦力の合計も線形に変化する。変位に比例する復元力（restoring force）が働くということは、運動が単振動（simple harmonic motion）であることを意味する。条件 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ は、まさにその振動の中心を 2 本の梁のちょうど中間に置く条件である。

解答

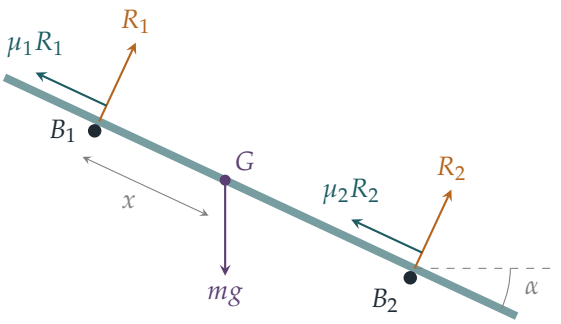
モデル

板を質量 m の剛体（rigid body）の棒とみなし、2 本の梁（点とみなす）の両方に接し続けるものとする。B_1 から B_2 への線分の長さは

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

であり、水平と角 α をなす。よって板はこの直線に沿って置かれ、B_1 から B_2 へ向かって下り坂になっている。重心 G の B_1 からの距離を、板に沿って斜面の下向きに測って x とする。すると放した瞬間に $x = 0$ であり、$x = d$ のとき G は B_2 の真上にある。

$0 \le x \le d$ である間、G は 2 本の梁の間にある。働く力は、G に働く重力 mg、B_1、B_2 において板に垂直に働く垂直抗力 R_1、R_2、そして板が斜面を下っている間は斜面の上向きに働く摩擦力 $\mu_1 R_1$ と $\mu_2 R_2$ である。



垂直抗力

板は自身に垂直な方向には動かないので、板に垂直な方向に力を分解すると

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

また板は回転もしないので、G のまわりの力のモーメント（moment）を考えると（重力と 2 つの摩擦力は G を通る直線上または板に沿って働くので、モーメントをもたない）

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

この 2 式を解くと

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

$0 \le x \le d$ ではどちらも 0 以上なので、板は確かに 2 本の梁の両方に接したままである。

運動方程式

板が斜面を下っている間、斜面に沿って下向きに力を分解すると、運動方程式（equation of motion）は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

ここで与えられた条件を用いる。$\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ より $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ である。したがって

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{ここで} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

であり、この不等式は $\mu_2 > \mu_1$ かつ $\cos\alpha > 0$ であることから成り立つ。

考えてみよう 板は本当に動き出すだろうか。また、摩擦力は常に斜面の上向きに働いているだろうか。

$x=0$ において $\ddot{x}=\frac{1}{2}\omega^2 d>0$ であるから、板は確かに斜面を滑り下り始める。上の方程式は $x=\frac{1}{2}d$ を中心とする単振動の方程式であり、$t=0$ で $x=0$、$\dot{x}=0$ という条件のもとでの解は

$$x=\tfrac{1}{2}d\,(1-\cos\omega t),\qquad \dot{x}=\tfrac{1}{2}d\,\omega\sin\omega t.$$

$0<t<\pi/\omega$ では $\dot{x}>0$ なので、板はこの間ずっと斜面を下っており、摩擦力が斜面の上向きに働くという仮定は正しかった。また、この間ずっと $0\le x\le d$ であるから、G は2本の梁の間にとどまり、R_1、R_2 の式も有効なままである。

静止に至る

速度が初めて再び0になるのは $\omega t=\pi$ のときであり、そのとき $x=\frac{1}{2}d(1-\cos\pi)=d$ となる。つまり重心は B_2 の真上にある。この瞬間 $R_1=0$、$R_2=mg\cos\alpha$ であるから、板は B_2 だけに支えられている。板はそのまま静止し続ける。なぜなら、B_2 における摩擦力は最大で $\mu_2 mg\cos\alpha$ まで働くことができ、一方で重力の斜面下向きの成分は $mg\sin\alpha$ であり、

$$\mu_2=\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)+\tfrac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)>\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)=\tan\alpha.$$

となるからである。よって板は、時間

$$\frac{\pi}{\omega}=\pi\left(\frac{d}{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

の後に、重心が B_2 の真上にある状態で静止する。これが示すべきことであった。

検算

- $\mu_2-\mu_1$ が小さければ、板はほとんど減速せず、時間は公式が示すとおり長くなる。このときそれぞれの μ は $\tan\alpha$ に近いので、合力はいたるところで0に近い。
- ランダムに選んだ α、d、μ_1（$\mu_2=2\tan\alpha-\mu_1$ とする）について運動方程式を数値的に時間発展させ、速度が初めて0に戻った時点で止めた。たとえば $\alpha=0.7$、$d=2$、$\mu_1=0.3$、$g=9.8$ のとき、予測される時間は約1.56秒である。どの場合も、停止時刻と停止位置は π/ω および $x=d$ と（相対誤差で）10^{-5} 以内で一致した。

よくある間違い

- $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$ としてしまうこと。垂直抗力は G の位置によって変わり、その依存性こそが振動を生み出している。
- 「速度が 0 になる」ところで終えてしまい、その後板が静止し続けることを確かめないこと。$\mu_2 \geq \tan\alpha$ であることを示す必要がある。

STEP のその先へ

この運動は、荷重によって変化する摩擦力が「ばね」の役割を果たす振動子の半周期分である。摩擦力が位置や速度に依存する系は豊かな振る舞いを示し、きしむ蝶番や弓で弾くバイオリンの弦の背後にあるスティック・スリップ振動（stick–slip oscillations）もその一例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、剛体のつり合い、単振動を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。