解答例

STEP III 2001、第 8 問

純粋数学 • 複素平面上の軌跡

> **STEP III 2001、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q8

鍵となる考え方

$z = x + \mathrm{i}y$ とおいて展開すると、(i) の二つの方程式はどちらも同じ円に帰着する。(ii) の偏角（argument）の条件については、$\frac{z-2}{z}$ を具体的に計算する。偏角が $\frac{\pi}{4}$ であるとは「実部（real part）と虚部（imaginary part）が等しく、しかもどちらも正である」ということであり、これは再びその円に不等式が一つ加わったものになる。(iii) では、円を表す式のうち計算が最もすっきりするものに $z = 2/w$ を代入する。(i) の二つ目の式は、まさにこの目的のために用意されている。

解答

小問 (i)

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。一つ目の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

となる。二つ目は

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

となる。各段階は可逆であるから、二つの方程式はいずれも $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ と同値であり、同じ軌跡（locus）を表す。この軌跡は中心 $1 + \mathrm{i}$、半径 $\sqrt{2}$ の円である。この円は 0、2、2i（および $2 + 2\mathrm{i}$）を通り、最も低い点は $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ で、実軸のわずかに下にある。

小問 (ii)

$z \neq 0$ のとき、

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

である。なぜなら $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$ だからである。

考えてみよう $\arg(\text{何か}) = \frac{\pi}{4}$ は、その実部と虚部について正確には何を述べているか。

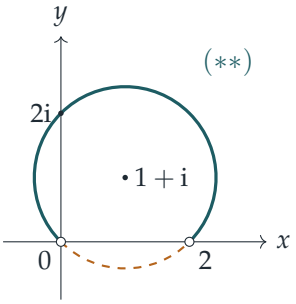
o でない複素数 $a+\mathrm{i}b$ の偏角が $\frac{\pi}{4}$ となるのは、それが半直線 $a = b > 0$ 上にあるときであり、かつそのときに限る。等しいというだけでは不十分である。$a = b < 0$ ならば偏角は $-\frac{3\pi}{4}$ となる。分母 x^2+y^2 は正であるから、$(**)$ が成り立つための必要十分条件は

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{かつ} \quad 2y > 0,$$

である。すなわち、z が (i) の円上にあって $y > 0$ を満たすことである。条件 $y > 0$ により、商が定義されない $z = 0$ と、商が o になって偏角をもたない $z = 2$ は自動的に除外される。

したがって $(**)$ は、円のうち実軸より上にある部分を表す。すなわち、0 から 2i と $2+2\mathrm{i}$ を経て 2 に至る優弧（major arc）であり、両端点は除く。実軸より下にある短い弧では、偏角は $-\frac{3\pi}{4}$ となる。

これは図形的な考察とも合っている。$\arg\frac{z-2}{z}$ は、点 z から 0 と 2 へ引いた二本の弦（chord）のなす角である。0 と 2 を結ぶ弦は中心 $1+\mathrm{i}$ に対して直角をなすから、中心角と円周角の定理（angle-at-the-centre theorem）により、優弧上のすべての点に対して $\frac{\pi}{4}$ の角をなす。



円全体が $(*)$ である。実線の弧（端点 0 と 2 は除く）が $(**)$ であり、破線の弧は $(**)$ に含まれない。

小問 (iii)

$w = 2/z$ であるから $z \neq 0$ かつ $z = 2/w$ である。円の二つ目の表し方 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$ を用いる。代入すると

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})[(1+\mathrm{i})-w]}{w},$$

となる。ここで $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$ を用いた。$|1-\mathrm{i}|^2 = 2$ であるから、方程式は

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

となる。よって w は $1+\mathrm{i}$ と 2 から等距離にあり、軌跡はこの二点を結ぶ線分の垂直二等分線（perpendicular bisector）である。線分の中点は $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、線分の方向は $1-\mathrm{i}$ であるから、垂直二等分線の方向は $1+\mathrm{i}$ である。$w = u+\mathrm{i}v$ とおくと、軌跡は直線

$$v = u-1.$$

である。この直線上のすべての点が実際に現れる。直線上の各 w は、0 がこの直線上にないから o でなく、そのとき $z = 2/w$ は上の可逆な変形により $(*)$ を満たす。円上の点で像をもたないのは $z = 0$ だけであり、この点は「無限遠に送られる」。予想どおり、原点を通る円は $w = 2/z$ によって直線に写される。

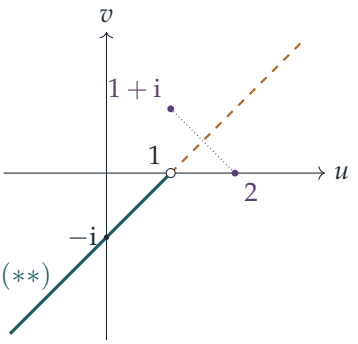
$(**)$ に対応する部分については、

$$\frac{z-2}{z} = 1-\frac{2}{z} = 1-w,$$

に注意すると、$(**)$ は $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$、すなわち $r>0$ として $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ となる。したがって

$$w = 1-\frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r>0,$$

であり、これは直線 $v = u-1$ のうち、$w=1$（除く）を始点として左下へ延びる半直線（half-line）である。すなわち $u<1$、言い換えれば $v<0$ を満たす点の全体である。これは (ii) と整合している。実際 $\operatorname{Im} w = -2y/|z|^2$ であるから、$y>0$ は $v<0$ に対応する。たとえば $z = 2\mathrm{i}$ は $w = -\mathrm{i}$ に写され、$z=2$ は除外される端点 $w=1$ に写される。



直線 $v = u - 1$ 全体が $(*)$ の像である。実線の半直線（$u < 1$、$w = 1$ は除く）が $(**)$ の像である。点線の線分は、この直線が二等分する二点を結んでいる。

検算

- $z = 2\mathrm{i}$ は円上にあり、実軸より上にある。$\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ であり、その偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。像 $w = -\mathrm{i}$ は $v = u - 1$ を満たし、$u < 1$ である。
- 円の最も高い点 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$ は $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$ に写され、確かに $0.2929 - 1 = -0.7071$ である。
- 実軸より下の点 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ では $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$ となる。その像は $u > 1$ を満たし、直線のもう一方の半分にある。

よくある間違い

- $\arg Z = \frac{\pi}{4}$ を単に $\mathrm{Re}\, Z = \mathrm{Im}\, Z$ とみなし、円全体が答えだと主張してしまう。実部と虚部がともに正であることも必要である。
- (ii) で $z = 0$ と $z = 2$ を、あるいは (iii) で $w = 1$ を除外し忘れる。
- 円の像はまた円になると思い込む。$w = 2/z$ のもとでは、原点を通る円は直線に写される。

STEP のその先へ

写像 $w = 2/z$ はメビウス変換（Möbius transformation）である。この種の写像は円と直線を円と直線に写し、円が直線に写されるのは、その円が無限遠に送られる点を通るときであり、かつそのときに限る。ここでは弧の端点 0 と 2 がそれぞれ ∞ と 1 に写される。これらの端点が張る角を測る商 $\frac{z-2}{z-0}$ は $1 - w$、すなわち像の点から 1 への

向きとなる。(ii) の弧が (iii) で半直線になるのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この図形的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。