解答例

STEP III 2001、第 7 問

純粋数学 • 直交軌道

> **STEP III 2001、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q7

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）なので、解けば曲線族が何であるかがそのままわかる。直交する曲線については、接線（tangent）が垂直であることは、傾き（gradient）の積が -1 になることを意味する。これにより 2 つ目の変数分離形の方程式が得られ、それを積分すると最初にグラフを描いた関数が現れる。最初のグラフは、最後の曲線をほとんど手間をかけずに描けるようにするためのものである。

解答

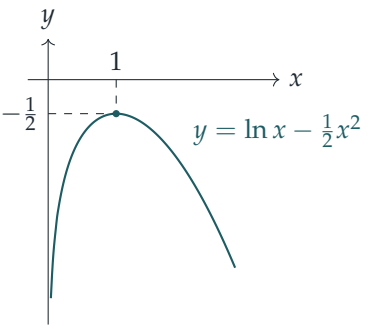
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$ のグラフ

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ を考える。このとき

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

$x > 0$ における停留点（stationary point）は $x = 1$ のみであり、そこで $f(1) = -\frac{1}{2}$ である。至るところで $f'' < 0$ であるから、これは極大であり、グラフは全体で上に凸（concave）である。したがって、すべての $x > 0$ に対して $f(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$ であり、グラフは x 軸と交わらない。

定義域（domain）の両端では、$x \to 0^+$ のとき $f(x) \to -\infty$（$\ln x \to -\infty$ だから）なので、y 軸は垂直な漸近線（asymptote）である。また、$\frac{1}{2}x^2$ は $\ln x$ よりはるかに速く増大するので、$x \to \infty$ のときも $f(x) \to -\infty$ である。



放物線の族

定数関数 $y = 0$ は解である。それ以外の場合は、方程式が定義されない $x = \pm 1$ を除いたところで変数を分離する：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2-1| + c.$$

よって $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2-1|$ である。符号を定数に含め、$y = 0$ も合わせると、解は

$$y = A(x^2-1), \qquad A \text{ は定数.}$$

逆に、このような曲線はどれも方程式を満たす。実際、

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2xy}{x^2-1}.$$

$A \neq 0$ のとき、各曲線は放物線（parabola）である。$(1,0)$ と $(-1,0)$ では $x^2-1=0$ となるので、放物線はこの 2 点を通る。傾き $2Ax$ が 0 になるのは $x = 0$ のときだけなので、頂点（vertex）は $(0,-A)$ であり、これは y 軸上にある。これが求める曲線族である。

直交する曲線

$x \neq \pm 1$ かつ $y \neq 0$ である点 (x,y) をとる。この点を通る族の放物線はちょうど 1 つ、すなわち $A = y/(x^2-1)$ のものであり、その点での傾きは $\dfrac{2xy}{x^2-1}$ である。求める曲線がその放物線と直角に交わるためには、2 つの傾きの積が -1 でなければならない。よって曲線は次を満たす必要がある。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-1}{2xy} = \frac{1-x^2}{2xy}.$$

考えてみよう 傾きを求めるのに、式 $y = A(x^2 - 1)$ ではなく放物線族の微分方程式を用いてよいのはなぜか。

微分方程式は、(x, y) を通る族の曲線の傾きを、A に一切触れずに x と y だけで与える。直交する曲線はその各点で異なる放物線と交わるのだから、これこそまさに必要なものである。

再び変数を分離すると、

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

となる。ただし曲線は $(1,1)$ を通るので $x > 0$ とした。右辺は $f(x) + C$ であり、最初にグラフを描いた関数である。$(1,1)$ では $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$ となる必要があるから $C = \frac{3}{2}$ であり、曲線は

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{すなわち} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

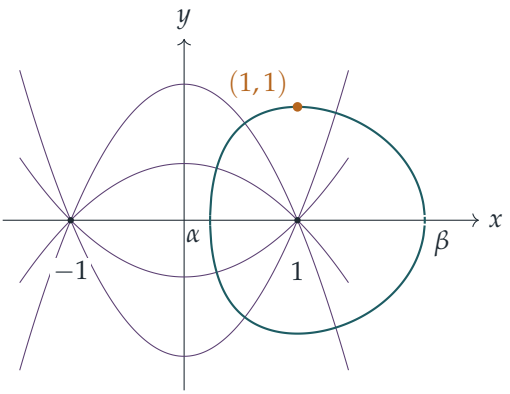
厳密には、$(1,1)$ を通る微分方程式の解は上半分 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$ である。これを x 軸に関して折り返したものもすべての放物線と直交するので、自然な答えは閉曲線全体である。

曲線のグラフ

実数の点が存在するには $f(x) \geq -\frac{3}{2}$ が必要である。最初のグラフから、f は $-\infty$ から増加して $x = 1$ で最大値 $-\frac{1}{2}$ をとり、再び $-\infty$ へと減少する。よって $f(x) = -\frac{3}{2}$ は $\alpha \in (0,1)$ となる解と $\beta > 1$ となる解をちょうど 1 つずつもつ。数値的には $\alpha \approx 0.229$、$\beta \approx 2.123$ である。したがって、

- 曲線は帯状領域 $\alpha \leq x \leq \beta$ に含まれ、x 軸に関して対称である。
- y^2 は $x = 1$ で最大値 1 をとり、点 $(1, \pm 1)$ が得られる。そこでは接線は水平である。
- $(\alpha, 0)$ と $(\beta, 0)$ では $y^2 = 0$ である一方 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$ なので、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は無限大となり、接線は垂直である。

よって曲線は左右非対称な閉じた卵形であり、左側では急に立ち上がり、右側ではより緩やかに下がっていく。比較のため、いくつかの放物線も描き込んである。



$x < 0$ も許して $\ln x$ を $\ln|x|$ に置き換えれば、同じ計算から左半平面にある鏡像の卵形も得られる。その卵形は $(1,1)$ を通らないので、答えには含まれない。

検算

- $(1,1)$ における曲線の傾きは $\frac{1-1}{2} = 0$ である。どの放物線も直線 $x = 1$ とは $(1,0)$ でしか交わらないので、$(1,1)$ そのものを通る放物線は存在しない。$x = 1$ の近くでは放物線はほぼ垂直であり、曲線の接線が水平であることと整合する。
- 数値的に確かめると、$x = 0.5$ において曲線は $y = \sqrt{\ln 0.5 - 0.125 + 1.5} \approx 0.826$、傾き $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)} \approx 0.908$ である。その点を通る放物線の傾きは $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75} \approx -1.101$ であり、$0.908 \times (-1.101) \approx -1$ となる。
- 卵形上の数千個の無作為な点で直交性を確認し、二分法（bisection）により解 $\alpha \approx 0.2291$ と $\beta \approx 2.1226$ を計算した。

よくある間違い

- 一般の点 (x,y) を通る族の曲線の傾きではなく、特定の A に対する $2Ax$ のように、ある 1 つの固定された放物線の傾きを用いてしまう。
- $y^2 = f(x) + \frac{3}{2}$ には $f(x) \geq -\frac{3}{2}$ が必要であることを忘れ、閉じた卵形ではなく有界でない曲線を描いてしまう。

STEP のその先へ

与えられた曲線族と直角に交わる曲線族を求めることは、**直交軌道**（orthogonal trajectories）の問題である。物理学では、これらは静電気学や 2 次元の流体の流れな

どにおける力線（field lines）と等電位線（equipotentials）として現れる。解析的な（analytic）複素関数の実部と虚部は常にこのような 2 つの族を与え、これは等角写像（conformal mapping）への入口の 1 つとなっている。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）は変数分離形の方程式と直交軌道を扱っている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は複素変数の観点からの描像を示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。