解答例

STEP III 2001、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形の中心

> **STEP III 2001、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q6

鍵となる考え方

すべては平面の法線ベクトル（normal vector）$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ によって決まる。点 $\mathbf{r}$ が平面上にあるのは、ちょうど $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 1$ となるときであり、また O と M から下ろした垂線（perpendicular）はどちらも $\mathbf{n}$ の方向に伸びる。垂心（orthocentre）と外心（circumcentre）は、3 次元幾何の 2 つの事実から導かれる。1 つは OA, OB, OC が互いに垂直であること、もう 1 つは M が OA, OB, OC を辺とする直方体の中心であり、したがって O, A, B, C から等距離にあることである。最後の小問では、2 本の垂線が平行なので、相似な三角形の組（あるいは 1 行のベクトル計算）で残りが片づく。

解答

以下では、a, b, c はいずれも 0 でないとする（そうでなければ平面は 3 本の座標軸すべてと交わらない）。したがって

$$A = (a, 0, 0), \qquad B = (0, b, 0), \qquad C = (0, 0, c),$$

であり、$S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$ とおく。

重心

直線 OM 上の点は $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$ と表せる。これを平面の方程式に代入すると $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$ となるので $t = \frac{2}{3}$ であり、交点は

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

である。これは三角形 ABC の重心（centroid）である。後のために、$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ であることに注意しておく。

O からの垂線：垂心

O からの垂線は直線 $\lambda\mathbf{n}$ である。これが平面と交わるのは $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$、すなわち $\lambda = 1/S$ のときであり、交点は

$$H = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

である。$AH \perp BC$ を示す。$\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$ を用いると

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{aS} - a\right)\cdot 0 + \frac{1}{bS}\cdot(-b) + \frac{1}{cS}\cdot c = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = 0.$$

考えてみよう この内積（dot product）が 0 になったのは、たまたまそうなっただけなのだろうか。それとも、そうならざるを得ない理由があるのだろうか？

理由はある。BC は平面上にあるので、法線 OH に垂直である。また BC は yz 平面上にあるので、x 軸に沿う OA にも垂直である。平行でない 2 直線 OA と OH の両方に垂直な直線は、平面 OAH 全体に垂直であり、特に AH に垂直である。

文字を入れ替えて同じ議論を行えば、$BH \perp CA$ および $CH \perp AB$ が得られる。H は三角形の平面上にあるので、$AH \perp BC$ は H が A から対辺に下ろした垂線（altitude）上にあることを意味し、残りの 2 本の垂線についても同様である。よって H は三角形 ABC の垂心である。

M からの垂線：外心

M からの垂線は $M + \mu\mathbf{n}$ である。これが平面と交わるのは $\frac{3}{2} + \mu S = 1$ のとき、すなわち $\mu = -\dfrac{1}{2S}$ のときであり、交点は

$$P = M - \frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

である。さて、M は O, A, B, C の 4 点すべてから等距離にある。たとえば

$$MA^2 = \left(\tfrac{1}{2}a - a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

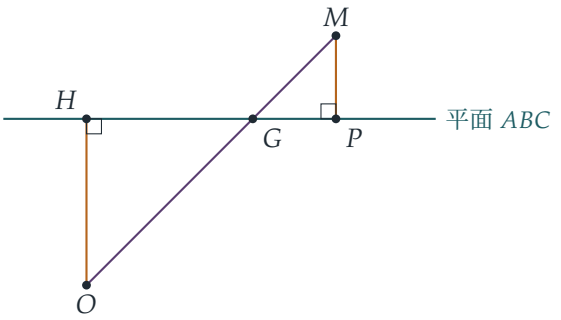
であり、MB^2, MC^2（および MO^2）も対称性により同じ値になる。MP は平面に垂直で、PA は平面上にあるので、三角形 MPA は P で直角となる。よってピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）より

$$PA^2 = MA^2 - MP^2,$$

であり、同様に $PB^2 = MB^2 - MP^2$, $PC^2 = MC^2 - MP^2$ である。右辺はすべて等しいので $PA = PB = PC$ である。平面上で 3 頂点から等距離にある点は外心だけであるから、P は三角形 ABC の外心である。

最後の小問

垂線 OH と MP はどちらも $\mathbf{n}$ に平行なので、O, H, M, P は同一平面上にあり、直線 OM は三角形の平面と G で交わる。また、$O \cdot \mathbf{n} = 0 < 1$ かつ $M \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} > 1$ であるから、O と M は三角形の平面に関して互いに反対側にある。これら 4 点を通る断面は次のとおりである。



三角形 OHG と MPG は、それぞれ H と P で直角をもち、G における対頂角が等しいので相似であり、その相似比は $OG : GM = 2 : 1$ である。したがって $HG : GP = 2 : 1$ であり、G は線分 HP 上にある。

同じ結論はベクトルから直接得られる。$H = \dfrac{1}{S}\mathbf{n}$, $P = M - \dfrac{1}{2S}\mathbf{n}$, $G = \frac{2}{3}M$ とすると

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

よって、G は垂心 H から外心 P への線分上にあり、それを $HG : GP = 2 : 1$ の比に分ける。これが示すべきことであった。（三角形が正三角形ならば $H = P = G$ であり、示すべきことは何もない。）

考えてみよう これで**すべての**三角形について結果が証明されたのだろうか？

そうとは言えない。この議論が適用できるためには、三角形が上の形の三角形 ABC のいずれかと合同でなければならない。このとき辺は $BC^2 = b^2 + c^2$, $CA^2 = c^2 + a^2$, $AB^2 = a^2 + b^2$ を満たすので

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

であり、B と C においても同様である。余弦定理（cosine rule）より、すべての角は鋭角である。逆に、任意の鋭角三角形はこの形で実現できる。実際、これら 3 つの方程

式を a^2, b^2, c^2 について解けば、それらはすべて正となる。したがって、この方法で証明できるのは鋭角三角形の場合である。直角三角形や鈍角三角形も含め、すべての場合を扱える平面上の短い議論を示しておく。外心を原点に置くと、頂点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はすべて同じ長さをもつ。$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ とおくと

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

となるので、$\mathbf{h}$ は $\mathbf{a}$ から下ろした垂線上にあり、対称性より残りの 2 本の垂線上にもある。すなわち、これが垂心である。重心は $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2 \cdot \mathbf{0})$ であり、これは同じ 2 : 1 の主張にほかならない。

検算

$a = 1, b = c = 2$ とすると、$S = \frac{3}{2}$ である。このとき $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ であり、いずれも $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$ を満たす。$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ および $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$ であること、さらに $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$ であることも確かめられる。また、正負両方の符号をとる a, b, c を無作為に 3000 通り選び、これらの事実をすべて厳密な算術で確認した。

よくある間違い

- $AH \perp BC$ だけを示して終わってしまう。3 本の垂線すべてを扱うか、「対称性より」とはっきり述べる必要がある。また、H が三角形の平面上にあることも述べなければならない。平面外の点では、$AH \perp BC$ であっても垂線上にないことがありうる。
- 比を逆にしてしまう。重心から垂心までの距離は、重心から外心までの距離の 2 倍である。
- 「hence（したがって）」以下の部分がすべての三角形を扱えると主張してしまう。上で示したとおり、この方法が届くのは鋭角三角形だけである。

STEP のその先へ

垂心、重心、外心を通る直線は**オイラー線**（Euler line）と呼ばれ、オイラー（Euler）の名にちなむ。（外心を原点としたときの）$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ という事実は九点円（nine-point circle）の出発点となる。九点円の中心もオイラー線上にあり、H と外心のちょうど中点に位置する。平面図形を単純な 3 次元図形の切り口とみなす工夫は、幾何学で繰り返し現れる考え方である。コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学

入門）と、Coxeter と Greitzer の *Geometry Revisited*（幾何学再入門）は、どちらもオイラー線と九点円を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。