解答例

STEP III 2001、第 5 問

純粋数学 • 放物線の法線

> **STEP III 2001、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

鍵となる考え方

定点 (h,k) を通る法線（normal）はどれかという問いは、パラメータ（parameter）t についての 3 次方程式（cubic）が実数解をいくつもつかという問いに帰着する。この 3 次式には t^2 の項がないので、最初の小問に現れる t^3+pt+q とまったく同じ形をしている。実数解の個数が変わるのは 2 つの解が合わさって重解（repeated root）になるときだけである。したがって「法線が 1 本」と「法線が 3 本」の境目は、この 3 次方程式が重解をもつところである。その境目こそが求める軌跡（locus）である。

解答

3 次方程式

$f(x)=x^3+px+q$ とおく。$p\geq 0$ のとき、すべての x に対して $f'(x)=3x^2+p\geq 0$ であり、$f'(x)=0$ となりうるのは高々 1 点 $x=0$ だけである（それも $p=0$ のときに限る）。よって f は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）である。実際、$x_1<x_2$ ならば $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x>0$ である。被積分関数は非負であり、0 になるのは高々 1 点だからである。

また、$x\to-\infty$ のとき $f(x)\to-\infty$、$x\to+\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$ である。f は連続なので、どこかで値 0 をとり、狭義単調増加であるからそれは一度だけである。よって実数解はちょうど 1 つである。

(h,k) を通る法線

C 上で $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ であるから、パラメータ t の点における法線の傾き（gradient）は $-t$ である。（これは $t=0$ でも成り立つ。そこでは接線（tangent）が鉛直で、法線は x 軸である。）法線の方程式は

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{すなわち} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

である。これが (h,k) を通るのは $k + th = 2at + at^3$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\boxed{at^3 + (2a-h)\,t - k = 0} \qquad \text{または、正の数で割って} a>0, \qquad t^3 + \frac{2a-h}{a}\,t - \frac{k}{a} = 0.$$

> **考えてみよう** 異なる 2 つの t の値が同じ法線を与え、解の個数を数えると法線を重複して数えてしまうことはないだろうか。

そのようなことはない。t における法線の傾きは $-t$ なので、異なる t の値は傾きの異なる法線を与え、それらは異なる直線である。よって (h,k) を通る法線の本数は、この 3 次方程式の相異なる実数解の個数にちょうど等しい。

$h \le 2a$ ならば係数 $p = \dfrac{2a-h}{a}$ は ≥ 0 であるから、最初の小問よりこの 3 次方程式の実数解はちょうど 1 つである。したがって、(h,k) を通る C の法線はちょうど 1 本であり、示すべきことが示された。

法線がちょうど 2 本となる点の軌跡

3 次方程式を $P = \dfrac{2a-h}{a}$、$Q = -\dfrac{k}{a}$ として $t^3 + Pt + Q = 0$ と書く。実係数の 3 次方程式の実数解は、重複度（multiplicity）を込めて数えると 1 個または 3 個である。よって、相異なる実数解を**ちょうど 2 個**もつのは、重解 s と、それとは異なる単根（simple root）をもつとき、かつそのときに限る。

t^2 の項がないので解の和は 0 であり、単根は $-2s$ である。$-2s \ne s$ となるために $s \ne 0$ が必要である。係数を比較すると

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2 t + 2s^3,$$

であるから、$P = -3s^2$、$Q = 2s^3$ である。もとの変数に戻すと

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \ne 0.$$

s を消去するために、$(h-2a)^3 = 27a^3 s^6$ および $k^2 = 4a^2 s^6$ に注意すると、$4(h-2a)^3 = 108a^3 s^6 = 27a\,k^2$ を得る。

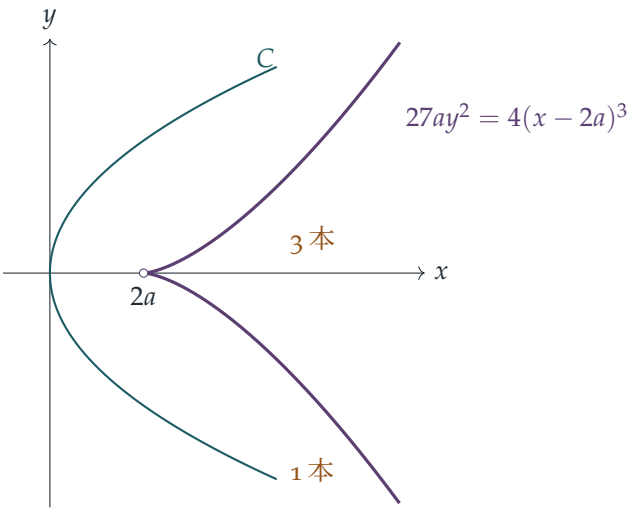
逆に、$(h,k) \neq (2a,0)$ として $27ak^2 = 4(h-2a)^3$ が成り立つとする。このとき $h-2a \geq 0$ であり、実際には $h > 2a$ である（$h = 2a$ ならば $k = 0$ となるから）。$2as^3 = -k$ を満たす実数を s とする。すると $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$ より $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$ となり、したがって $h-2a = 3as^2$ である。よって (h,k) は $s \neq 0$ として上の形に表され、そこを通る法線はちょうど 2 本である。（同値な言い方をすれば、これは重解条件 $4P^3 + 27Q^2 = 0$ である。）

点 $(2a,0)$ そのものは除かれる。そこでは $P = Q = 0$ で、3 次方程式は 3 重解をもつ $t^3 = 0$ となり、そこを通る法線は 1 本（x 軸）だけである。

したがって求める軌跡は

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{ただし次の点を除く：} (2a,0).$$

である。これは $(2a,0)$ に尖点（cusp）をもつ半 3 次放物線（semicubical parabola）であり、x 軸に関して対称で、$x \geq 2a$ の範囲にあり、$y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$ と表される。その内側（$2a$ より先の x 軸の正の部分を含む領域）では 3 次方程式は相異なる 3 つの実数解をもつので、各点を 3 本の法線が通る。外側では法線は 1 本だけである。



図は $a = 1$ の場合である。白丸は除かれる尖点を表し、ラベルは各領域の点を通る法線の本数を表す。

検算

- $a = 1$、$s = 1$ とすると点 $(5,-2)$ が得られる。3 次方程式は $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$ であり、$(1,2)$ と $(4,-4)$ における法線はともに $(5,-2)$ を通る。実際、$t = 1$ におけ

る法線は $y+x=3$、$t=-2$ における法線は $y-2x=-12$ である。どちらも $(5,-2)$ を含み、また $27\cdot 4=108=4\cdot 27$ である。

- $(5,0.1)$（$a=1$）では $4P^3+27Q^2=-108+0.27<0$ となり、法線は3本である。$(5,4)$ では $-108+432>0$ となり、法線は1本である。これは図と一致する。
- 法線の方程式と、実数解が1つであるという主張を、数百のランダムな場合について数値的に確かめた。

よくある間違い

- 尖点 $(2a,0)$ を除き忘れる。そこでも方程式は満たされるが、法線は1本しかない。
- $p\geq 0$ のとき $f'(x)>0$ であると主張してしまう。$p=0$ のとき $f'(0)=0$ なので、それでも f が狭義単調増加であるという、少し強い議論が必要である。
- 法線の傾きを $-t$ ではなく $1/t$（接線の傾き）と書いてしまう。

STEP のその先へ

この軌跡は放物線の**縮閉線**（evolute）である。すなわち、曲率中心（centre of curvature）が描く曲線であり、また法線の包絡線（envelope）でもある。縮閉線を横切ると、その点から引ける法線の本数が2だけ変化する。これはカタストロフィー理論（catastrophe theory）や3次式の判別式（discriminant）の背後にある考え方の最初の例である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、この趣旨の STEP の問題がさらに収められている。Bruce と Giblin の *Curves and Singularities*（曲線と特異点）では、縮閉線と包絡線が本格的に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。