解答例

STEP III 2001、第 4 問

純粋数学 ・ 逆三角関数

> **STEP III 2001、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q4

鍵となる考え方

式 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ を見て思い当たることがあるはずである。これは $x = \tan\theta$ としたときの $\sin 2\theta$ に対する「t 公式」(t-formula) である。置換 (substitution) $x = \tan\theta$ を行うと、この式の $\sin^{-1}$ は $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ となり、問題全体は「$\sin^{-1}(\sin\phi)$ が本当に ϕ に戻るのはどのようなときか」という問いに帰着する。その答えは ϕ が主値の範囲 (principal range) $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属するかどうかで決まり、$x = \pm 1$ で場合分けが生じるのはまさにこのためである。

解答

小問 (i)

まず $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ の基本的な性質を調べる。

- 分母は決して 0 にならないので、g はすべての点で定義され、連続 (continuous) である。
- $g(-x) = -g(x)$ であるから、g は奇関数 (odd function) であり、そのグラフは原点に関して回転対称である。
- $g(0) = 0$ であり、$g(x)$ は x と同符号である。また、分母は x^2 のように増大し、分子は x のようにしか増大しないので、$x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to 0$ である。したがって x 軸は漸近線 (asymptote) であり、$x \to \infty$ のときは上から、$x \to -\infty$ のときは下から近づく。

商の微分法（quotient rule）により、

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

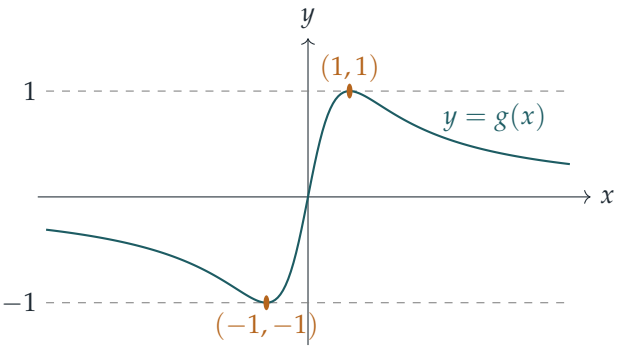
これが 0 となるのは $x = \pm 1$ のときだけである。$|x| < 1$ では正、$|x| > 1$ では負であるから、$x = 1$ で極大値 $g(1) = 1$ をとり、$x = -1$ で極小値 $g(-1) = -1$ をとる。原点における傾きは $g'(0) = 2$ である。

これらの極値が最大値・最小値でもあることは、微分を使わずに確かめられる。

$$1 - g(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \qquad 1 + g(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0,$$

よって、すべての x に対して $-1 \leq g(x) \leq 1$ であり、等号が成り立つのは $x = \mp 1$ のときに限る。g は連続で値 -1 と 1 をとるので、（中間値の定理（intermediate value theorem）により）その間のすべての値をとる。したがって

関数g の値域は $-1 \leq g(x) \leq 1$.



小問 (ii)

小問 (i) より、$\frac{2x}{1+x^2}$ はつねに $\sin^{-1}$ の定義域である $[-1, 1]$ に属するので、f はすべての実数 x に対して定義される。

$\theta = \tan^{-1} x$ とおくと、$-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たす $x = \tan\theta$ が成り立つ。このとき

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

であるから、

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

考えてみよう $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ は単に 2θ ではないのか？

そうなるのは、2θ が $\sin^{-1}$ の値域（range）、すなわち $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属するときだけである。定義により、$\sin^{-1} y$ はこの区間内で正弦が y となる**ただ一つの**角である。したがって $f(x)$ を求めるには、$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 内で 2θ と同じ正弦をもつ角を見つけなければならない。

$-1 \le x \le 1$ の場合。 tan は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で増加するので、これは $-\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ を意味し、よって $-\frac{1}{2}\pi \le 2\theta \le \frac{1}{2}\pi$ である。このとき 2θ 自身が、主値の範囲内で正弦が $\sin 2\theta$ となる角であるから、

$$f(x) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (-1 \le x \le 1).$$

$x \ge 1$ の場合。 このとき $\frac{1}{4}\pi \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから $\frac{1}{2}\pi \le 2\theta < \pi$ となり、主値の範囲の外にある。しかし

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad \text{かつ} \qquad 0 < \pi - 2\theta \le \tfrac{1}{2}\pi,$$

であるから、$\pi - 2\theta$ が主値の範囲内で正しい正弦をもつ角である。したがって

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \ge 1).$$

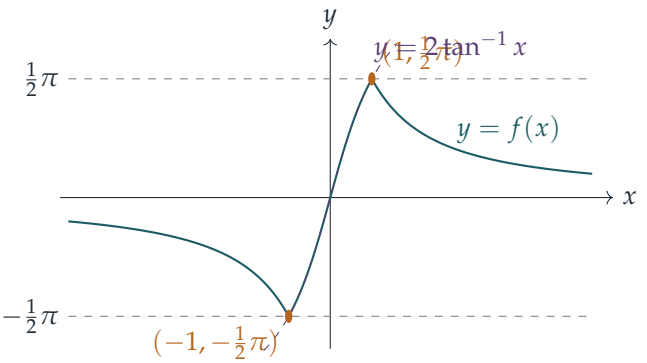
$x = 1$ ではどちらの式も $\frac{1}{2}\pi$ を与え、当然そうなるべきである。これで「示せ」と問われた内容の証明が完了した。

グラフを描くには $x \le -1$ の場合も必要である。g は奇関数であり $\sin^{-1}$ も奇関数であるから、f も奇関数となり、$x \le -1$ に対して $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$ である。（同じことだが、そこでは $-\pi < 2\theta \le -\frac{1}{2}\pi$ であり、$-\pi - 2\theta$ が $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 内で同じ正弦をもつ角である。）

グラフの形。

- $[-1, 1]$ 上では、$f(x) = 2\tan^{-1} x$ は $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで増加し、原点を傾き 2 で通る。
- $x \ge 1$ では、$f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{2}\pi$ から減少し、$x \to \infty$ のとき上から $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$ に近づく。奇関数であることから、$x \le -1$ では $-\frac{1}{2}\pi$ から増加し、$x \to -\infty$ のとき下から 0 に近づく。よって、ここでも x 軸が漸近線となる。
- 傾きは $|x| < 1$ では $\dfrac{2}{1+x^2}$、$|x| > 1$ では $-\dfrac{2}{1+x^2}$ である。$x = 1$ では傾きが $+1$ から -1 へと跳び（$x = -1$ でも同様）、グラフは $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$ で尖った角をもつ。すなわち f はそこで連続であるが微分可能（differentiable）ではない。

この角は合成関数の微分法（chain rule）から直接確かめられる。$f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$ であり、小問 (i) より $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$ であったから、その平方根は $|1-x^2|/(1+x^2)$ である。よって $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$ であり、符号は $1 - x^2$ の符号と一致する。



破線の曲線は、$2\tan^{-1} x$ を $x = 1$ を越えて延長したものである。これは $\frac{1}{2}\pi$ より上へ上がってしまうが、$\sin^{-1}$ の値がそうなることは決してない。そのため f は代わりに下へ「折り返す」のである。

検算

- $x = \sqrt{3}$ のとき：$g(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$ である。一方、公式からは $\pi - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ が得られる。一致する。
- $x = 10$ のとき：$f(10) = \sin^{-1}(20/101) \approx 0.19934$ であり、$\pi - 2\tan^{-1} 10 \approx 0.19934$ である。コンピュータで $[-1, 1]$、$[1, 10^4]$、$[-10^4, -1]$ のそれぞれから 10^5 個の x の値を無作為に選んで検証したところ、10^{-7} の精度で一致し、$x = 1$ における片側の傾きは $+1$ と -1 になった。
- もし f がいたるところで $2\tan^{-1} x$ であれば、大きな x に対してほぼ π に達してしまうが、これは $\sin^{-1}$ の値としてはあり得ない。折り返しによってこの矛盾が解消される。

よくある間違い

- 2θ が $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属することを確かめずに $\sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$ と書いてしまう。
- $x = 1$ で f のグラフを滑らかな丸い山として描いてしまう。$\sqrt{1 - g^2}$ には $1 - x^2$ ではなく $|1 - x^2|$ が現れるので、グラフはそこで角をもつ。
- $x \to \pm\infty$ のとき f が（$\pm\pi$ ではなく）0 に近づくことを忘れてしまう。

STEP のその先へ

逆三角関数は、**分枝**（branch）を選ぶことの最初の例である。sin は一対一（one-to-one）ではないので、逆関数をとる前に定義域を制限しなければならず、そのため $\sin^{-1}(\sin\phi) = \phi$ のような恒等式はその分枝の上でしか成り立たない。同じ問題は複素解析（complex analysis）で中心的な役割を果たし、そこでは $\log z$ や $z^{1/2}$ に分枝切断（branch cut）が必要になる。また、$x = 1$ における角は、滑らかな部分をつなぎ合わせて作られた関数が、ある点で連続であるが微分可能でないという好例でもある。分枝や多価関数について図を豊富に用いて学ぶには Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を、連続性と微分可能性については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。