解答例

STEP III 2001、第 3 問

純粋数学 • 2 次方程式の解

> **STEP III 2001、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q3

鍵となる考え方

根（roots）についての条件を、係数（coefficients）についての条件に言い換える。根を α と β とすると $\alpha+\beta=b$ かつ $\alpha\beta=c$ であり、根が実数となるかどうかは判別式（discriminant）からわかる。小問 (ii) では、$f(x)=x^2-bx+c$ のグラフで考えるほうが易しい。2 つの根がともに -1 と 1 の間に（端点を含まずに）あるのは、放物線（parabola）が ±1 で正の値をとり、かつその頂点（vertex）がその間にあるとき、かつそのときに限る。

解答

以下では一貫して $f(x)=x^2-bx+c$ とおき、根が実数のときはそれらを $\alpha\le\beta$ と表す。すると

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{b^2-4c}).$$

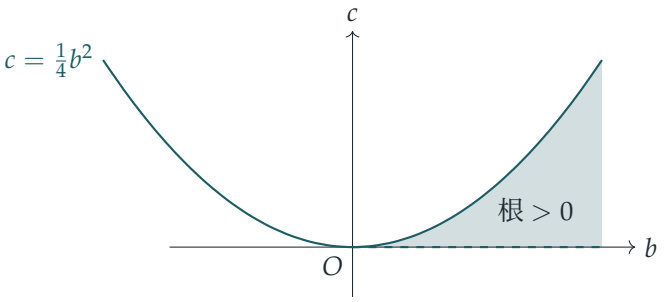
重根（repeated root）は、等しい 2 つの実数解として数える。

小問 (i)

($\Rightarrow$) 根が実数かつ正であると仮定する。根が実数であるためには $b^2-4c\ge0$ が必要である。さらに、2 つの根はともに正なので、$b=\alpha+\beta>0$ かつ $c=\alpha\beta>0$ である。これらを合わせると $b>0$ かつ $b^2\ge4c>0$ が得られる。

($\Leftarrow$) $b>0$ かつ $b^2\ge4c>0$ と仮定する。$b^2-4c\ge0$ なので、根は実数である。$\alpha\beta=c>0$ なので、根は 0 でなく、同符号である。$\alpha+\beta=b>0$ なので、その共通の符号は負ではありえない。よって 2 つの根はともに正である。

以上で同値性（equivalence）が示された。b-c 平面において、この条件は $b > 0$ かつ $0 < c \leq \frac{1}{4}b^2$ を表す。すなわち、第1象限のうち、b 軸の正の部分と放物線 $c = \frac{1}{4}b^2$ に挟まれた領域である。放物線上の点は含まれ（重根 $\frac{1}{2}b > 0$）、b 軸上の点は除かれる（そこでは $c = 0$ であり、根の一方が 0 となる）。



実線の曲線（$b > 0$ の部分）は領域に含まれる。b 軸上の破線部分と原点は含まれない。

小問 (ii)

2つの根がともに実数で、$-1 < \alpha \leq \beta < 1$ となることが必要である。根が実数であるという前提のもとで、これが成り立つのは

$$f(1) = 1 - b + c > 0, \qquad f(-1) = 1 + b + c > 0, \qquad -1 < \tfrac{1}{2}b < 1.$$

のとき、かつそのときに限る（if and only if）ことを示す。

($\Rightarrow$) $-1 < \alpha \leq \beta < 1$ ならば、各括弧が正なので $f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) > 0$ かつ $f(-1) = (1+\alpha)(1+\beta) > 0$ である。また $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ は $(-1,1)$ 内の2数の平均なので、$(-1,1)$ に属する。

($\Leftarrow$) $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ が ≤ 0 となるのはちょうど $[\alpha,\beta]$ 上なので、条件 $f(1) > 0$ は1が $[\alpha,\beta]$ に属さないことを意味する。よって $1 < \alpha$ または $1 > \beta$ である。頂点 $\frac{1}{2}b$ は $[\alpha,\beta]$ に属し、$\frac{1}{2}b < 1$ なので $\alpha \leq \frac{1}{2}b < 1$ となる。これにより $1 < \alpha$ は否定されるから、$\beta < 1$ である。同様に、$f(-1) > 0$ と $\frac{1}{2}b > -1$ から $\alpha > -1$ が得られる。

考えてみよう なぜ $f(1) > 0$ と $f(-1) > 0$ だけでは不十分なのだろうか？

2つの根が区間の同じ側にある可能性があるからである。たとえば $x^2 - 5x + 6 = 0$ の根は2と3であるが、$f(\pm 1) > 0$ が成り立つ。根を両方とも区間の一方の端より外に置くのではなく、-1 と1の間に置くのは、頂点の条件 $|b| < 2$ の働きである。

これらを実数条件 $b^2 \geq 4c$ と合わせると、求める領域は

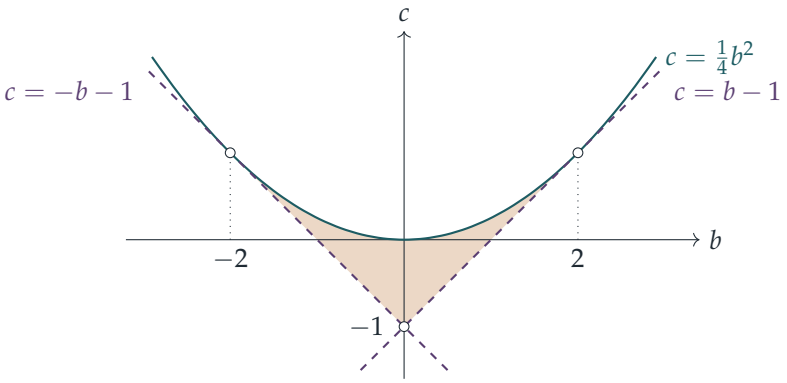
$$|b| < 2, \qquad c > b - 1, \qquad c > -b - 1, \qquad c \leq \tfrac{1}{4}b^2,$$

すなわち $|b| < 2$ かつ $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$ である。

図を描くために、直線と放物線の位置関係を調べる。

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

であるから、直線 $c = b - 1$ は放物線の下側にあり、$(2,1)$ でのみ放物線に接する。したがってこれはその点における接線（tangent）である。対称性（$b \mapsto -b$）により、$c = -b - 1$ は $(-2,1)$ における接線である。2 直線は $(0,-1)$ で交わる。求める領域は、これら 2 本の接線と、2 つの接点の間の放物線の弧で囲まれた曲線三角形である。



放物線のうち $|b| < 2$ の弧は含まれる（$|\frac{1}{2}b| < 1$ を満たす重根 $\frac{1}{2}b$）。2 本の破線の接線部分は除かれる。そこでは根の一方が ± 1 となるからである。3 つの角 $(\pm 2, 1)$ と $(0,-1)$ も除かれる。

検算

- $(b,c) = (0,-\frac{1}{4})$ は小問 (ii) の領域の内部にあり、根は $\pm\frac{1}{2}$ である。$(b,c) = (0,-1)$ は除かれる角であり、根はちょうど ± 1 である。
- $(b,c) = (2.7, 1.8)$ は $c > |b| - 1$ と $c \leq \frac{1}{4}b^2$ を満たすが、$|b| > 2$ である。その根は 1.2 と 1.5 なので、頂点の条件によって正しく除外されている。
- 2 つの領域を数値的にも確かめた。すべての境界曲線上の点を含む 115 000 個を超える有理点 (b,c) において、正確な根と上で述べた条件とを比較したところ、食い違いは 1 つもなかった。

よくある間違い

- 小問 (ii) で頂点の条件 $|b| < 2$ を忘れること。そうすると、$|b| = 2$ より外側で各接線と放物線の間にある細い部分が誤って加わってしまう。

- 境界の扱いを誤ること。放物線はどちらの小問でも含まれるが、(i) の b 軸と (ii) の接線は含まれない。

STEP のその先へ

$f(\pm 1)$ と頂点に関する条件は、「多項式のすべての根が与えられた領域内にあるのはどのようなときか」という一般的な問いの小さな例である。単位円板の場合には、この問いにはシューア・コーン判定法（Schur–Cohn test）が答える。左半平面の場合にはラウス・フルビッツの安定判別法（Routh–Hurwitz criterion）があり、制御工学の技術者はこれを用いてシステムが安定かどうかを判定する。小問 (ii) は、特性根（characteristic roots）が実数である場合の漸化式（recurrence）$u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$ の安定領域にちょうど一致する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。