解答例

STEP III 2001、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数による置換と面積

STEP III 2001、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q2

鍵となる考え方

2 つの不等式はどちらも「直角双曲線（rectangular hyperbola）に類する曲線の片側にとどまる」ことを表している。そこでまず、2 本の双曲線を描き、それらの交点を求めることになる。領域は有界で、4 重の対称性をもつ部分であることがわかり、その面積は $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ の形の積分 2 つで表される。これらはまさに双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）で扱いやすくなる積分であり、前半の小問は、そこで現れる $\cosh^{-1}$（および $\sinh^{-1}$）の値を対数に書き直すために置かれている。

解答

$\cosh^{-1} x$ の対数による表示

$x \geq 1$ とし、$y = \cosh^{-1} x$ とおく。これは定義により、$\cosh y = x$ を満たす**非負の**数である。このとき

$$x = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} + 1 = 0,$$

となり、これは e^{y} についての二次方程式（quadratic equation）であるから

$$\mathrm{e}^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **考えてみよう** どちらの符号をとるべきか。それはなぜか。

2 つの解の積は 1（二次方程式の定数項）であり、プラスの符号の解は 1 以上である。したがってマイナスの符号の解は 1 以下であり、これは $y \leq 0$ を与えてしまう。$y \geq 0$ であるから、プラスの符号をとらなければならない（$x = 1$ のときは、いずれにせよ 2

つの解は一致する)。よって

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

となり、示された。$x = \sinh y$ としてまったく同じ議論を行うと $e^{2y} - 2x e^y - 1 = 0$ が得られる。今度は2つの解の積が -1 なので、正であるのはプラスの解だけであり、$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ となる。以下ではこの両方を用いる。

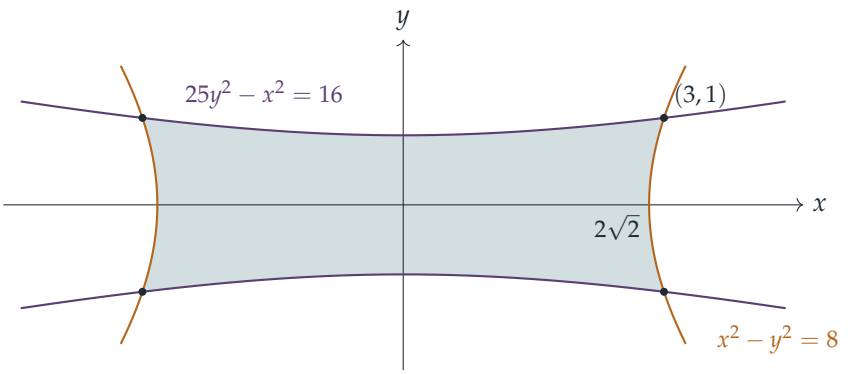
領域

不等式を次のように書き直す。

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad \text{かつ} \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

曲線 $x^2 - y^2 = 8$ は、$(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ を通り左右に開く2つの枝をもつ双曲線(hyperbola)である。1つ目の不等式は、この2つの枝の**間**にとどまること、すなわち $|x| \le \sqrt{y^2 + 8}$ を表す。曲線 $25y^2 - x^2 = 16$ は、$(0, \pm\frac{4}{5})$ を通り上下に開く2つの枝をもつ双曲線である。2つ目の不等式は、これらの枝の間にとどまること、すなわち $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2 + 16}$ を表す。

2曲線が交わるのは $x^2 = y^2 + 8$ かつ $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$ のときであるから、$y^2 = 1$、$x^2 = 9$ となり、交点は4点 $(\pm 3, \pm 1)$ である。



この領域(網掛け部分)は有界である。実際、(x, y) が領域に属するならば $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2 + 16) + 8$ であるから $x^2 \le 9$ となり、さらに $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$ となる。2つの不等式はどちらも $x \mapsto -x$ および $y \mapsto -y$ で変わらないので、領域は両座標軸に関して対称であり、その面積は第1象限にある部分の面積 A の4倍である。

第1象限では、縦に切って考える。

- $0 \le x \le 2\sqrt{2}$ のときは $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$ なので1つ目の不等式は自動的に成り立ち、y は0から $\frac{1}{5}\sqrt{x^2 + 16}$ まで動く。

▶ $2\sqrt{2} \leq x \leq 3$ のときは、y は $\sqrt{x^2-8}$ から $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$ まで動く（交点の計算から、下側の曲線が上側の曲線より下にあるのは、ちょうど $x^2 \leq 9$ のときである）。

したがって

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

第 1 の積分

$x = 4\sinh s$ と置換すると、$\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$、$\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$ である（$\cosh s > 0$ なので正）。積分区間の端は $s = 0$ と $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$ である。$\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$ を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[\,8\sinh s\cosh s + 8s\,\Big]_0^S \\ &= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\sinh S = \frac{3}{4}$、$\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ を用いた。

第 2 の積分

$t \geq 0$ として $x = 2\sqrt{2}\cosh t$ と置換すると、$\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$、$\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$ である（$t \geq 0$ なので正）。積分区間の端は $t = 0$ と

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

である（前半の小問による）。$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$ を用いると

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[\,4\sinh t\cosh t - 4t\,\Big]_0^T \\ &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$、$\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ を用いた。

まとめる

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

代数的な部分はちょうど打ち消し合い、全体の面積は

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

となり、示された。

検算

- $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$ である。2 つの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $I_1 \approx 13.0452$、$I_2 \approx 0.11371$ となり、$\frac{15}{2} + 8\ln 2$ および $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ と一致する。また、細かい格子点のうち両方の不等式を満たすものを単純に数えると、面積はおよそ 9.98 となる。
- 大きさの妥当性の確認：領域は面積 12 の長方形 $[-3,3] \times [-1,1]$ に含まれ、その長方形の四隅から細い部分が欠けているだけなので、面積が 10 をわずかに下回るのは妥当である。
- $\cosh^{-1} 1 = \ln 1 = 0$ であり、当然そうなるべき値になっている。

よくある間違い

- 不等式を双曲線の「外側」と読んでしまうこと。$y^2 \geq x^2 - 8$ は $x^2 - y^2 = 8$ の 2 つの枝の**間**の領域であり、y 軸を含む。
- 1 つ目の不等式が効いてくるのは $x > 2\sqrt{2}$ のときだけであることを忘れ、$\int_0^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$ を引いてしまうこと。この積分はそもそも実数にならない。
- $\mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$ でマイナスの符号をとってしまうこと。これは $-\cosh^{-1} x$ を与える。

STEP のその先へ

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ と $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ という 2 つの型の積分が双曲線関数による置換で処理できるのは、$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ が $x = a\sin\theta$ で処理できるのと同じ理由による。すなわち、恒等式 $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ が平方根を取り除いてくれるのである。実は、双曲線関数は**面積**を測っている。$(\cosh t, \sinh t)$ におけるパラメータ t は単位双曲線（unit hyperbola）の扇形の面積の 2 倍であり、これはちょうど θ が円の扇形の面積の 2 倍であるのと同様である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに多く収められている。また、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、指数関数や対数関数、ひいては双曲線関数がどのように厳密な基礎の上に築かれるかが示されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。