解答例

STEP III 2001、第 13 問

確率・統計　・　硬貨の表裏の列のゲーム

> **STEP III 2001、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.8 節「**ペニーのゲーム**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/penney.html

鍵となる考え方

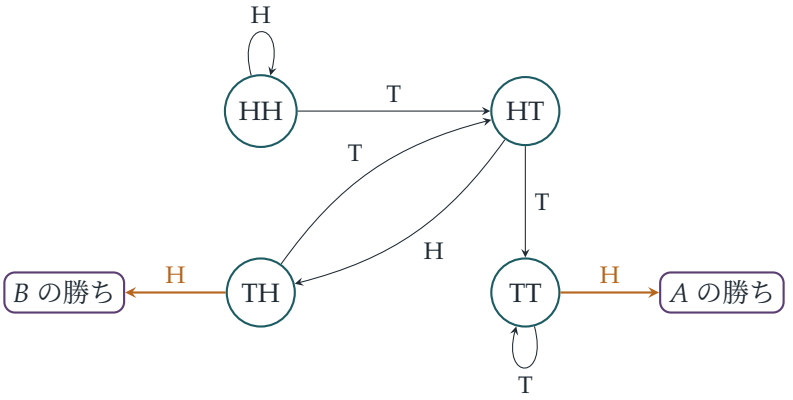
どちらの目標の列も長さが 3 なので、3 回目の投げより前に勝つ者はいない。そしてそれ以降、今後の展開に関係するのは**直前の 2 回の結果**だけである。したがって「状態」（state）は HH、HT、TH、TT の 4 つしかなく、次の 1 回の結果で条件付ける（conditioning）と、このゲームは各状態からの勝つ確率についての小さな連立一次方程式（system of linear equations）に帰着する。小問 (ii) と (iii) も同じ方法で解けるが、4 つのゲームのうち 2 つでは短い直接的な議論のほうが早い。

解答

以下を通じて、各回の投げは独立（independent）であり、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で H または T が出るものとする。少なくとも 2 回投げてまだ誰も勝っていないとき、次の 1 回の結果と直前の 2 回の結果によって、その時点で誰かが勝つかどうか、そして勝たない場合には新しい直前の 2 回の結果が決まる。それより前の結果は関係しない。各目標の列は長さが 3 しかないからである。よって、ある時点から勝つ確率は直前の 2 回の結果だけで決まり、それはその 2 回が新しいゲームの最初の 2 回であった場合の確率と等しい。

小問 (i)

最初の 2 回が XY であるという条件のもとで、A（TTH）が B（THH）に勝つ確率を p_{XY} とする。次の図は、次の 1 回の結果によって状態がどのように移るかを示している。



$p_{TT} = 1$ となる理由。直前の 2 回が TT であるとする。確率 1 でいずれ表が出る（n 回続けて裏が出る確率は $2^{-n} \to 0$ である）。表が出るまではすべて裏なので、THH は現れ得ない。また、最初の表の直前には少なくとも 2 回の裏があるので、その表で TTH が完成する。よって A は確実に勝つ。すなわち $p_{TT} = 1$ である。

$p_{HT} = \frac{1}{2}p_{TH} + \frac{1}{2}p_{TT}$ となる理由。HT の後では、HTH も HTT も目標の列ではないので、3 回目で勝つ者はいない。3 回目が H（確率 $\frac{1}{2}$）なら直前の 2 回は TH となり、T なら TT となる。3 回目の結果で条件付け、直前の 2 回だけが重要であるという先の注意を用いると、

$$p_{HT} = \tfrac{1}{2}p_{TH} + \tfrac{1}{2}p_{TT}.$$

残りの 2 つの状態。TH の後では、表が出れば THH となって B が勝ち、裏が出れば HT が残る。HH の後では、表が出れば HH が残り、裏が出れば HT が残る（また、ここでは HHH、HHT は目標ではない）。よって

$$p_{TH} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_{HT}, \qquad p_{HH} = \tfrac{1}{2}p_{HH} + \tfrac{1}{2}p_{HT}.$$

2 番目の式から $p_{HH} = p_{HT}$ を得る。$p_{TH} = \frac{1}{2}p_{HT}$ と $p_{TT} = 1$ を p_{HT} の式に代入すると、

$$p_{HT} = \tfrac{1}{4}p_{HT} + \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{3}{4}p_{HT} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad p_{HT} = \tfrac{2}{3}.$$

したがって $p_{HH} = p_{HT} = \frac{2}{3}$ であり、$p_{TH} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ となって、示すべきことが得られた。

考えてみよう たとえば TH が実際には 5 回目と 6 回目に現れたとき、TH を最初の 2 回であるかのようにみなしてゲームを「再スタート」してよいのはなぜか。

ゲームの今後は、今後の投げの結果と直前の 2 回の結果だけで決まるからである。まだ完成していない TTH や THH の出現は、すでに投げた結果のうち高々直前の 2 回しか使えない。それ以前の履歴はどちらの列の役にも立たず、今後の投げはそれと独立である。

全体の確率。 最初の 2 回で勝つ者はおらず、4 通りの組はそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ をもつ。全確率の公式（law of total probability）より、

$$\mathrm{P}(A\text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}+1\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

小問 (ii)

今度は B が THH、C が HHT をもつ。ここでは直接的な議論が最もすっきりする。

最初の 2 回が HH の場合、 C が勝つ。その後の最初の裏（確率 1 で出る）の直前には HH があるので HHT が完成し、それまでの投げはすべて表なので、THH は現れ得ない。

それ以外の場合、 最初の 2 回の中に裏がある。確率 1 でパターン HH はいずれ現れる。その最初の出現を考える。それは 1 回目から始まるのではないので、その直前の投げが存在し、それは H ではない（もし H ならもっと前に HH があることになる）ので T である。よって最初の HH は THH を完成させる。一方、HHT はそれより前には現れ得ない。それにはもっと前の HH が必要だからである。よって B が勝つ。

したがって、最初の 2 回が HH でない限り B が勝つ：

$$\mathrm{P}(B\text{ が勝つ}) = 1-\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

小問 (iii)

C（HHT）対 D（HTT）。直前の 2 回が XY のときに C が勝つ確率を q_{XY} とする。HH からは、(ii) と同じ理由で C が確実に勝つ。最初の裏で HHT が完成し、HTT には HT の後の裏が必要であるが、それが先に来ることはない。よって $q_{\mathrm{HH}} = 1$ である。他の各状態で次の 1 回の結果で条件付けると：

HT:	T なら HTT（D の勝ち）、H なら TH：	$q_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}q_{\mathrm{TH}}$,
TH:	H なら HH、T なら HT：	$q_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q_{\mathrm{HT}}$,
TT:	H なら TH、T なら TT：	$q_{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}q_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}q_{\mathrm{TT}}$.

最後の式から $q_{TT} = q_{TH}$ を得る。1 番目の式を 2 番目に代入すると $q_{TH} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q_{TH}$ となるので、$q_{TH} = \frac{2}{3}$、$q_{TT} = \frac{2}{3}$、$q_{HT} = \frac{1}{3}$ である。よって

$$\mathrm{P}(C \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2},$$

となり、C のほうが D より勝つ可能性が高い。

D（HTT）対 A（TTH）。これは小問 (ii) で H と T を入れ替えたものである。最初の 2 回が TT なら A が勝つ。最初の表で TTH が完成し、HTT には表の後に裏が 2 回続くことが必要であるが、それはその最初の表より前には起こり得ない。それ以外の場合、最初の 2 回の中に表がある。確率 1 でパターン TT はいずれ現れる。その最初の出現は 1 回目から始まるのではなく、その直前の投げは T ではあり得ない（もっと前に TT があることになる）ので H であり、最初の TT は HTT を完成させる。TTH はそれより前には現れ得ない。それにはもっと前の TT が必要だからである。よって D が勝ち、

$$\mathrm{P}(D \text{ が勝つ}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}.$$

したがって D のほうが A より勝つ可能性が高い。

考えてみよう A は B に勝ち、B は C に勝ち、C は D に勝ち、D は A に勝つ。なぜこのようなことが起こり得るのか。

「勝つ可能性がより高い」という関係は推移的（transitive）ではないので、矛盾はない。4 人のプレイヤーは循環をなしており、それぞれのゲームで A、B、C、D が勝つ確率は $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ である。後から選ぶ者は、常に先に選んだ者の列に勝つ列を選ぶことができる。

検算

- 小問 (i) で代入して確かめる：$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3} = p_{HT}$、また $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = p_{TH}$ である。
- 状態を用いる方法は小問 (ii) と D–A のゲームにも使える。B 対 C では、HH、HT、TH、TT からの B の勝つ確率は $0, 1, 1, 1$ であり、その平均は $\frac{3}{4}$ となる。
- 各組み合わせについて 200 000 回のゲームをシミュレーションしたところ、勝ちの相対度数は 0.664、0.752、0.666、0.749 であり、厳密な値 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ とよく合った。

よくある間違い

- ゲームが 3 回目で終わり得ることを忘れる。たとえば、TH の後に H が出れば B が即座に勝つことに気づかず、$p_{TH} = \frac{1}{2}p_{HH} + \frac{1}{2}p_{HT}$ と書いてしまう。

- 最初の 2 回の各組が確率 $\frac{1}{4}$ をもつこと、そして 3 回目より前には誰も勝てないことを述べずに、4 つの状態の確率を平均してしまう。

STEP のその先へ

これはペニーのゲーム（Penney's game）であり、非推移的（non-transitive）な確率の有名な例である。状態を用いる方法は吸収マルコフ連鎖（absorbing Markov chain）の理論そのものであり、そこでは吸収確率がまさにここで解いたような連立一次方程式を満たす。さらに、任意の 2 つの列の間の勝ち目を与える閉じた公式さえあり、それがコンウェイ（Conway）の「リーディング数」（leading numbers）のアルゴリズムである。これはマルチンゲール（martingale）を用いて証明できる。マルコフ連鎖と第一段解析（first-step analysis）については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、あるいは Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。