解答例

STEP III 2001、第 11 問

力学 ・ 回転エネルギーの保存

STEP III 2001、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q11

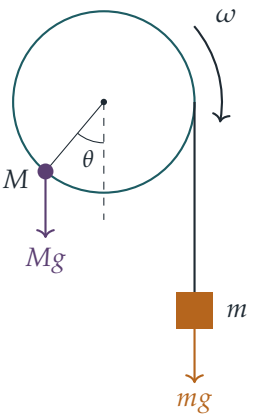
鍵となる考え方

すべてがなめらか（smooth）である（軸には摩擦がなく、糸は軽い）ので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。したがって、エネルギーの式を一つ立てるだけで、張力（tension）や力を考えることなく ω を θ の関数として表せる。円柱が止まるのは、ちょうど ω^2 が 0 になるときである。よって後半の問いは、θ の一つの関数についての問題になる。つまり、つり下げられた質点の位置エネルギー（potential energy）の減少が、常に粒子の位置エネルギーの増加を上回っていなければならない。式を整理すると、これは m/M と $(1-\cos\theta)/\theta$ の最大値との比較になり、素直な最大化の問題である。

解答

角速度

m と M を質点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）もので円柱上を滑らないとし、軸はなめらかであるとする。円柱が m を下降させる向きに角 θ だけ回転したとし、$\omega = \dot{\theta}$ とおく。



円柱が θ だけ回転したとき、長さ $a\theta$ の糸がほどけているので、m は $a\theta$ だけ落下しており、速さ $a\omega$ で運動している。粒子 M は円周上にあるので速さ $a\omega$ で運動する。M ははじめ軸より a だけ下にあり、現在は軸より $a\cos\theta$ だけ下にあるので、$a(1-\cos\theta)$ だけ上昇している。

運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2+\tfrac{1}{2}M(a\omega)^2+\tfrac{1}{2}m(a\omega)^2=\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2.$$

である。なめらかな軸は仕事をせず、糸は軽く伸び縮みしないので、エネルギーを損失なく伝える。よって、運動エネルギーの増加は位置エネルギーの正味の減少に等しい：

$$\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2=mga\theta-Mga(1-\cos\theta),$$

これより

$$\boxed{\omega^2=\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}\qquad\text{かつ}\qquad\omega=\sqrt{\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}.$$

を得る。

モデル化に関して一点確認しておくべきことがある。それは、糸がたるまずに張ったままでなければならないということである。エネルギーの式を時間で微分すると $\big(I+(M+m)a^2\big)\ddot{\theta}=ga(m-M\sin\theta)$ が得られ、張力は $T=m(g-a\ddot{\theta})$ である。ここで $a\ddot{\theta}<g$ は $a^2(m-M\sin\theta)<I+(M+m)a^2$、すなわち $-Ma^2\sin\theta<I+Ma^2$ と同値であり、これは常に成り立つ。よって常に $T>0$ であり、エネルギーの式はすべての θ に対して有効である。

決して止まらないこと

はじめ $\ddot{\theta}=gam/(I+(M+m)a^2)>0$ であるから、円柱は確かに選んだ向きに回り始める。ω は連続なので、符号を変えるには 0 を通過するしかない。したがって、すべ

ての $\theta > 0$ に対して $\omega^2 > 0$ であれば、円柱は永久に回り続ける。$k = m/M$ とおくと、ω^2 の式から、これが起こるのはちょうど

$$k\theta > 1 - \cos\theta \quad \text{すべての} \theta > 0, \qquad \text{すなわち} \qquad k > h(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad \text{すべての} \theta > 0.$$

のときである。よって、$\theta > 0$ における h の最大値が必要になる。

停留点（stationary point）。

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

である。$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ および $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いると

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

となる。$0 < \theta < \pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta$ と $\cos\frac{1}{2}\theta$ はともに正であるから、$h'(\theta)$ の符号は $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$ の符号と一致する。$u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$ とおく。すると $u(0) = 0$ であり、$u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$ は 0 の近くで負、$u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$ であるから、u は $[0,\pi)$ で凸（convex）である。u はいったん 0 より小さくなり、その後 $\theta \to \pi$ のとき $+\infty$ に発散する。凸関数が 0 と交わるのは高々 2 回であるから、u は $(0,\pi)$ にちょうど一つの零点をもち、それが α である。よって h は $(0,\alpha)$ で増加し、(α,π) で減少する。

> **考えてみよう** 最大となるところでの h の値はいくらか。また、それより大きい θ ではどうなるか。

$\theta = \alpha$ では h' の分子が 0 になるので、$1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$ であり、したがって

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

である。$\pi \le \theta \le 2\pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$ かつ $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$ であるから、$\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$ となり $h' \le 0$ である。すなわち h は 2π まで減少し続けるので、$(\alpha, 2\pi]$ で $h < \sin\alpha$ である。$\theta > 2\pi$ では $h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$ である。最後に、$u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$ かつ $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$ であるから $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$ となり、$\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$ を得る。よって $\sin\alpha$ は $\theta > 0$ における h の最大値であり、それをとるのは $\theta = \alpha$ のときに限る。

結論。$m/M > \sin\alpha$ ならば、すべての $\theta > 0$ に対して

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

となる。したがって、すべての $\theta > 0$ に対して $\omega^2 > 0$ であり、円柱は止まることなく回転する。これが示すべきことであった。

（逆に、$m/M < \sin\alpha$ ならば $\theta = \alpha$ で $\omega^2 < 0$ となるので、ω はそれより前に 0 に達し、円柱は止まって逆向きに戻る。境界の場合 $m/M = \sin\alpha$ では、系は平衡位置 $\theta = \alpha$ にじわじわと近づくが、決してそこに到達しない。）

検算

- $M = 0$ のとき、公式は $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$ を与える。これは滑車から糸がほどけながら質点が落下するときの標準的な結果である。ω^2 は一次関数的に増加し、角加速度が一定の場合と一致する。
- $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$ を二分法（bisection）で解くと $\alpha \approx 2.3311$（約 133.6°）、$\sin\alpha \approx 0.7246$ となる。$0 < \theta < 100$ の範囲で $(1 - \cos\theta)/\theta$ を数値的に探索しても、同じ最大値 0.7246 が得られる。
- ランダムな I, a, M, m に対して運動方程式を数値的に解き進めると ω^2 の公式が再現され、$m/M = 0.735$ では円柱は決して止まらず、$m/M = 0.715$ では止まる。

よくある間違い

- M または m の運動エネルギーを忘れること。どちらも速さ $a\omega$ で運動するので、実効的な慣性モーメント（moment of inertia）は $I + (M + m)a^2$ である。
- M の高さを誤ること。M は $a\sin\theta$ ではなく $a(1 - \cos\theta)$ だけ上昇する。
- h が α で極大（local maximum）をとることだけを示し、それより大きいすべての θ で h がより小さいことを確かめないこと。

STEP のその先へ

これはポテンシャル中の 1 自由度（one degree of freedom）の運動である：$\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$、ただし $V(\theta) = Mga(1 - \cos\theta) - mga\theta$ であり、これは傾いた「洗濯板」型ポテンシャル（washboard potential）である。静止状態から出発した場合、運動が限りなく進み続けるのは、すべての $\theta > 0$ に対して V が出発時の値より小さいままであるときに限る。同じ描像は、物理学における強制振り子（driven pendulum）やジョセフソン接合（Josephson junction）も記述する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種のエネルギー図を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。