解答例

STEP III 2001、第 10 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP III 2001、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

鍵となる考え方

相対速度（relative velocity）は差である。C に対する A の相対速度は $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$ である。二つの条件をいずれも内積（dot product）で書き表すと、すべてを中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ から測ることになり、二つの条件は平方の差（difference of two squares）の形になる。幾何学的に読めば、これらの方程式は円と直線を表しており、速度が二つあるという個数はそこから生じる。

解答

条件

船は海面という水平な平面上を動く質点として扱う。したがって、速度はすべて 2 次元ベクトルである。C に対する A と B の相対速度は

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

である。大きさが等しく、かつ垂直であるという条件は

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad \text{かつ} \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

を意味する。

二つの方程式

次のようにおく。

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

すると $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$、$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$ であるから、

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

となる。$\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$ を用いて、それぞれの条件を展開する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{d} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) = -4\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{d}.$$

よって、垂直であるという条件 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ はちょうど $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{d}|^2$ ということであり、これは

$$\left|\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right|^2,$$

である。また、大きさが等しいという条件 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$ はちょうど $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = 0$ ということであり、これは（2 を掛けて）

$$\left(\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

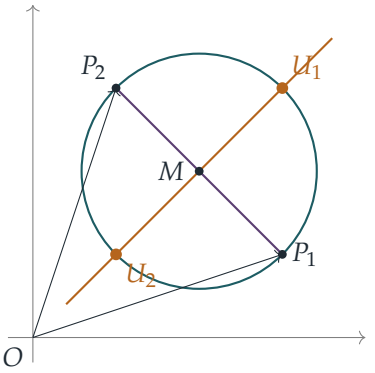
である。これらが求める二つの方程式である。上の各段階はすべて恒等式であったから、議論は逆向きにもたどれる。すなわち、二つの方程式が成り立つのは、二つの条件が成り立つときかつそのときに限る。

C の速度が二つある理由

速度を共通の原点からの位置ベクトルとして描き、$\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{u}$ の先端をそれぞれ P_1、P_2、U とし、P_1P_2 の中点を M とする。

考えてみよう それぞれの方程式は、点 U がどこにありうるかについて何を述べているか。

第 1 の方程式は、U が M から距離 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ にあること、すなわち U が P_1P_2 を直径とする円の上にあることを述べている。第 2 の方程式は、MU が P_1P_2 に垂直である（または $U = M$ である）こと、すなわち U が P_1P_2 の垂直二等分線（perpendicular bisector）の上にあることを述べている。



平面上では、半径が正の円の中心を通る直線は、その円とちょうど 2 点、すなわちある直径の両端で交わる。半径は $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ であり、これが正であるのはまさに $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ だからである。したがって、C の速度としてありうるものはちょうど二つであり、

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \pm \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

である。ここで $\mathbf{d}^{\perp}$ は $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ を直角だけ回転させたものである。（$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ならば円は 1 点 M に縮み、そのとき二つの相対速度はともに零となるので、条件は意味のあることを何も述べない。）図において、直角 P_1UP_2 は半円に対する円周角であり、U が垂直二等分線上にあるので $UP_1 = UP_2$ である。

最後の部分

今度は $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = k$ かつ $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ であり、$k > 0$ とする（垂直であることは零でないベクトルについてのみ意味をもつ）。このとき $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は垂直で零でないから平面を張り、$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ と書ける。

第 2 の方程式は、$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ と $|\mathbf{v}_1|^2 = |\mathbf{v}_2|^2$ を用いると

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2\right) = 0, \qquad \text{よって} \qquad \alpha k^2 - \beta k^2 = 0,$$

を与え、したがって $\beta = \alpha$ である。第 1 の方程式は展開すると

$$|\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

となる。$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ であるから、$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$ と $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$ はいずれも $2k^2$ に等しい。よってこれらは打ち消し合い、$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ となる。$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ とすると、これは

$$2\alpha^2 k^2 = 2\alpha k^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

である。よって $\alpha = 0$ であって $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となるか、$\alpha = 1$ であって $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ となる。ゆえに、$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ であり、これで示された。

これは物理的にも納得がいく。C が静止していれば、相対速度は $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ そのものであり、これらはすでに条件を満たしている。$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ならば、相対速度は $-\mathbf{v}_2$ と $-\mathbf{v}_1$ であり、これらもやはり長さが等しく垂直である。

検算

図と同じく $\mathbf{v}_1 = (3,1)$、$\mathbf{v}_2 = (1,3)$ とする。公式から $\mathbf{u} = (2,2) \pm (1,1)$、すなわち $(3,3)$ または $(1,1)$ を得る。$\mathbf{u} = (3,3)$ のとき相対速度は $(0,-2)$ と $(-2,0)$ であり、$(1,1)$ のときは $(2,0)$ と $(0,2)$ である。どちらの組も長さが等しく垂直である。コンピュータで 10^4 組のランダムな $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を調べたところ、二つの恒等式と二つの解が確認された。また、長さが等しく垂直なランダムな組 10^3 組について、解がちょうど $\mathbf{0}$ と $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- C に対する A の相対速度を $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$ と書いてしまう。この問題の条件には符号は影響しないが、相対速度の問題の多くでは符号が重要になる。
- 速度がちょうど二つである理由を述べ忘れる。この個数は、平面で考えていること（3 次元では解は円全体をなす）と、半径が零でないことに依存している。

STEP のその先へ

$\mathbf{u}$ から $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ に移ることは基準系の変換（change of reference frame）であり、すべての速度を同じベクトルだけずらしても相対速度が変わらないという事実はガリレイ不変性（Galilean invariance）とよばれ、古典力学の出発点である。ここで用いた、速度を点として描く「速度図（velocity diagram）」の見方は、衝突や追跡の問題も幾何学の問題に変えてくれる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と基準系を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。