解答例

STEP III 2001、第 1 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q1

鍵となる考え方

関数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ は $\sinh^{-1} x$ であり、その 1 階導関数（first derivative）は関数そのものよりはるかに単純である。その導関数を 2 乗すると平方根を含まない関係式 $(x^2+1)(y')^2 = 1$ が得られ、これを微分すると漸化式（recurrence）の $n = 0$ の場合が得られる。さらに微分するたびに漸化式は 1 段ずつ上がっていく。これはまさに数学的帰納法（induction）に必要なことである。$x = 0$ では x の項が消え、漸化式は $y^{(n+2)}(0)$ を $y^{(n)}(0)$ に直接結びつけるので、マクローリン級数（Maclaurin series）の係数はほとんど労せずにすべて求まる。

解答

導関数

$s = \sqrt{x^2+1}$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$ である。$s > \sqrt{x^2} = |x|$ であるから、すべての実数 x に対して $x + s > 0$ となり、対数はいたるところで定義されることに注意する。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

となり、示すべき式が得られた。

数学的帰納法

$P(n)$ を次の命題とする。

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{すべての実数} x.$$

基底段階、$n = 0$。 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$ を示せばよい。前半の結果から $(x^2+1)(y')^2 = 1$ である。これを x で微分すると、

$$2x(y')^2 + (x^2+1)\cdot 2y'y'' = 0.$$

$y' = 1/\sqrt{x^2+1}$ は決して 0 にならないので $2y'$ で割ることができ、$(x^2+1)y'' + xy' = 0$ を得る。これが $P(0)$ である。（あるいは、$y' = (x^2+1)^{-1/2}$ を直接微分してもよい。$y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$ であるから、$(x^2+1)y'' = -x(x^2+1)^{-1/2} = -xy'$ となる。）

帰納段階。 ある $k \geq 0$ に対して $P(k)$ が成り立つと仮定する。

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+1)} + k^2\,y^{(k)} = 0.$$

これはすべての x について成り立つので、微分してよい。はじめの 2 項に積の微分法（product rule）を用いると、

$$2x\,y^{(k+2)} + (x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+1)\,y^{(k+1)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+2)} + k^2\,y^{(k+1)} = 0.$$

項を整理すると、

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+3)\,x\,y^{(k+2)} + (k^2+2k+1)\,y^{(k+1)} = 0,$$

となり、$2k+3 = 2(k+1)+1$ かつ $k^2+2k+1 = (k+1)^2$ であるから、これはまさに $P(k+1)$ である。

> **考えてみよう** $y^{(k+2)}$ の係数がちょうど 2 だけ増えるのはなぜか？

第 1 項の (x^2+1) を微分すると $2x\,y^{(k+2)}$ が生じ、これが第 2 項から来る $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$ に加わる。同様に、第 2 項の x を微分して生じる $(2k+1)$ が k^2 に加わり、k^2+2k+1 は完全平方式になる。この漸化式は、自分自身を再生産するようにできているのである。

$P(0)$ が成り立ち、すべての $k \geq 0$ に対して $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ であるから、数学的帰納法によりすべての $n \geq 0$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

マクローリン級数

$P(n)$ に $x = 0$ を代入する。中央の項が消えて、

$$y^{(n+2)}(0) = -n^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

が残る。初期値が 2 つ必要である。$y(0) = \ln(0+1) = 0$ と $y'(0) = 1/\sqrt{1} = 1$ である。

偶数階の導関数。 $y(0) = 0$ から、漸化式により $y''(0) = 0$、次に $y^{(4)}(0) = 0$、以下同様となり、偶数階の導関数はすべて 0 で値 0 をとる。（これは y が奇関数

（odd function）であることからも従う。$(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$ であるから、$y(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ となる。）

奇数階の導関数。 $y'(0)=1$ から始めると、

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -1^2\cdot y'(0) = -1, \\ y^{(5)}(0) &= -3^2\cdot y'''(0) = 9, \\ y^{(7)}(0) &= -5^2\cdot y^{(5)}(0) = -225. \end{aligned}$$

考えてみよう $y'''(0)$ から $y^{(5)}(0)$ を得るのは n がいくつのときか？

$n+2=5$ として $y^{(n+2)}$ を得るには $n=3$ が必要なので、係数は -5^2 ではなく $-3^2=-9$ である。係数には**低いほうの**導関数の階数を用いる。

したがって、マクローリン級数 $y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$ は

$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

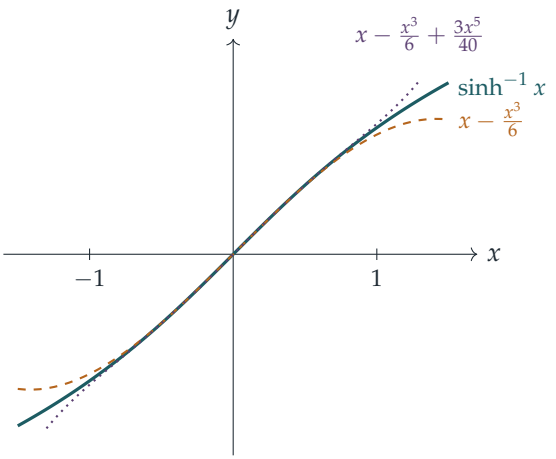
となり、示すべき形で始まる。そして、次の 0 でない項は

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

である。

別の方法。 二項級数（binomial series）$(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$ を $y(0)=0$ として項別に積分すると（$|x|<1$ で有効）、$x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$ が得られ、結果は一致する。

下の図は、部分和（partial sums）が原点付近では $y=\sinh^{-1}x$ にぴったり寄り添い、原点から離れると交互に上回ったり下回ったりする様子を示している。



検算

- $x = 0.1$ のとき $\ln\left(0.1 + \sqrt{1.01}\right) = 0.0998340789$ であり、$x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} = 0.0998340789$ も同じ値になる。差は約 3×10^{-11} で、これは次の（x^9 の）項の大きさである。
- $n = 0$ の場合は $x = 1$ で簡単に確かめられる。$y' = 1/\sqrt{2}$、$y'' = -1/(2\sqrt{2})$ であるから、$2y'' + y' = 0$ となる。
- 0 における奇数階の導関数の値は $1, -1, 9, -225$、すなわち $(-1)^m \left(1 \cdot 3 \cdots (2m-1)\right)^2$ である。気づいておきたい、美しい規則性である。

よくある間違い

- $y^{(n+2)}(0) = -n^2 y^{(n)}(0)$ で n を取り違え、係数を $-1, -9, -25$ ではなく $-9, -25, -49$ としてしまう。
- $k!$ で割るのを忘れる。x^7 の係数は -225 ではなく $-225/5040$ である。
- 帰納段階で、$x^2 + 1$ の微分から生じる $2x\, y^{(k+2)}$ を見落とす。

STEP のその先へ

テイラー級数（Taylor series）が役に立つのは収束する範囲においてだけであり、この級数が収束するのは、$\sinh^{-1} x$ が実数直線全体で完全に滑らかであるにもかかわらず、ちょうど $|x| \leq 1$ の範囲である。その理由は複素平面（complex plane）にある。$1/\sqrt{1+z^2}$ は原点から距離 1 の点 $z = \pm \mathrm{i}$ で発散し、その距離が収束半径（radius

of convergence）なのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）はこのことを見事に解説している。テイラー（Taylor）の定理とその剰余項（remainder）について実変数の立場からの話は、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。