解答例

STEP II 2001、第 9 問

力学 ・ 速度の 2 乗に比例する空気抵抗

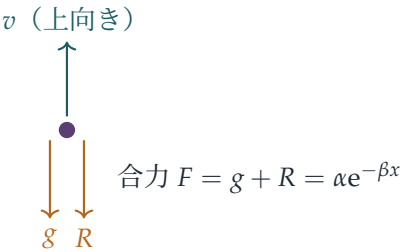
> **STEP II 2001、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q9

鍵となる考え方

力は**時間**ではなく**高さ**の関数として与えられているので、自然な道具は仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）である。すなわち、上昇の間に F に逆らってなされる仕事は、失われた運動エネルギー（kinetic energy）にちょうど等しい。これにより $\mathrm{e}^{-\beta x}$ が v^2 と結びつき、その結果から空気抵抗（air resistance）が速さだけに依存することがわかる。速さによる抵抗の法則がわかれば、下降の運動は v^2 に関する標準的な微分方程式（differential equation）になる。

解答

モデル化。 粒子の質量は単位質量であり、鉛直線上を運動する。上昇中は、重力と空気抵抗がともに運動と逆向き、すなわち下向きにはたらくので、合力 F（大きさ $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$）は下向きにはたらく。投射点から上向きに x をとる。



消費されるエネルギー

高さ x に達するまでに消費されるエネルギーは、F に逆らってなされる仕事である。

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right).$$

このエネルギーは粒子の運動エネルギーから供給されるので、仕事とエネルギーの原理により（単位質量）

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right). \qquad (*)$$

（同じことであるが、ニュートン（Newton）の運動の第二法則を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ の形に書き、$x=0, v=u$ から積分しても同じ式が得られる。）

速さで表した力

$(*)$ に β を掛けて整理すると、

$$\alpha - \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

となり、求める式が得られる。

考えてみよう なぜ $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$ でなければならないのか。問題文にはそれを強制するものは何もないように見える。

F を二つの部分に分ける：$F = g + R$、ただし R は空気抵抗である。すると

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\right).$$

したがって抵抗は速さだけの関数であり、v^2 の項と定数の和である。空気抵抗は空気中を運動することによって生じるので、粒子が一瞬静止する最高点では o にならなければならない。そこで $v=0$ とおくと $R=0$ となるから、$F=g$（重力のみがはたらく）であり、

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{すなわち、} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

よって定数項は o であり、抵抗の法則は単に

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

となる。（参考までに、最高点は $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = g$ となる点であり、その高さは $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ である。）

下降の運動

運動の向きによらず同じ抵抗の法則 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$ が成り立つと仮定する。下降中、抵抗は運動に逆らって**上向き**にはたらき、重力は引き続き下向きにはたらく。最高点から

下向きに測った距離を y、下向きの速さを v とし、$y=0$ で $v=0$ とする。ニュートンの運動の第二法則（単位質量）を下向きに立てると

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$ であるから、$w=v^2$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w=0 \text{ となるのは} y=0.$$

これは定数係数の線形微分方程式（linear with constant coefficients）である（あるいは変数分離（separation of variables）してもよい）。その解は

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

であり、確かに $w(0)=0$ および $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g - \beta w$ を満たす。したがって、最高点から距離 y だけ下の点における空気抵抗は

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

である。

検算

$y \to \infty$ のとき $R \to g$ となる。すなわち粒子は終端速度（terminal speed）$\sqrt{2g/\beta}$ に近づき、そこでは抵抗と重力がつり合う。$y=0$ では $R=0$ であり、静止しているのだから当然である。上昇中、$x=0$ では公式から $F = \alpha = g + \frac{1}{2}\beta u^2$ となり、これは重力と速さ u における抵抗の和である。数値的には、$g=9.8, \beta=0.1, u=20$（したがって $\alpha = 29.8$）として、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で運動方程式を数値的に解くと、上昇中の $F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ と下降中の $R = g(1-\mathrm{e}^{-\beta y})$ がおよそ 10^{-12} の精度で再現され、粒子は高さ ≈ 11.12 で最高点に達し、$\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ と一致する。

よくある間違い

- F を空気抵抗だけだと考えてしまう。F は**合力**であるから、R を得るには重力を差し引かなければならない。
- 下降中も抵抗の符号を同じままにしてしまう。抵抗は常に運動を妨げる向きにはたらくので、下降中は上向きにはたらき、方程式は $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \frac{1}{2}\beta v^2$ となる。
- v を用いて、あるいは u と α を用いて答えてしまう。問題が求めているのは、y、g、β のみで表した R である。

STEP のその先へ

二次抵抗（quadratic drag）$R \propto v^2$ は、空気中を高速で運動する物体に対する現実的なモデルであり、この問題は巧妙な技法を示している。すなわち、時間に関する v の方程式は線形ではないにもかかわらず、距離に関する v^2 の方程式は**線形**になるのである。大学の力学では、上昇してから下降する問題が非対称であることも扱う。粒子は u より小さい速さで出発点に戻り、下降には上昇よりも長い時間がかかる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、速度に依存する力と終端速度が詳しく論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。