解答例

STEP II 2001、第 8 問

純粋数学 ・ 周期関数と常微分方程式

> **STEP II 2001、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q8

鍵となる考え方

周期（period）が 1 の関数は、長さ 1 のどの区間でも同じ形をしているので、そのような区間上の積分はどれも同じ値になる。したがって、x が 1 増えるたびに F は同じ量 $F(1)$ だけ増える。最後の小問の微分方程式は 1 階線形（first order linear）なので、積分因子（integrating factor）を用いると解は $-F(x)$ の指数関数の形になり、残りは $F(1)$ が正であることから従う。

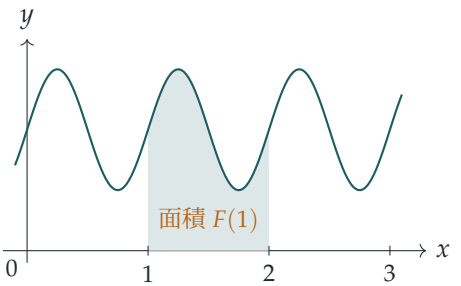
解答

小問 (i)

次のようにとる。

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

sin は周期 2π をもつので $\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$ であり、よって $f(x+1) = f(x)$ である。また $\sin(2\pi x) \geq -1$ なので、すべての x に対して $f(x) \geq 1 > 0$ である。（$f(x) = 1$ のような定数関数でもよいが、面白みに欠ける。）



グラフの下にある幅 1 の帯はどれも同じ面積をもつ。小問 (ii) の内容はこれに尽きる。

小問 (ii)

$G(x) = F(x+1) - F(x)$ と定義する。第 1 項に連鎖律（chain rule）を用いて微分すると、f の周期性より、すべての x に対して

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

となる。よって G は定数であり、$F(0) = 0$ だから、その値は $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$ である。すなわち

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{すべての} x.$$

が成り立つ。ここで n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ のとき、主張 $F(1) = 1 \cdot F(1)$ は自明に成り立つ。ある正の整数 k に対して $F(k) = kF(1)$ が成り立つとすると、上の式で $x = k$ とおいて

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

を得る。したがって、すべての正の整数 n に対して $F(n) = nF(1)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

（同じことだが、f が連続ならば $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ であり、$F(n)$ は $[k, k+1]$ 上の n 個の積分の和となる。置換 $t \mapsto t + k$ を行えば、そのそれぞれは $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ に等しい。上の議論は、そもそも F を積分として書く必要を避けている。）

小問 (iii)

この方程式は y について線形であり、積分因子は $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$ である。ここで F が登場する。実際、積の微分法（product rule）と $F' = f$ より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

となる。よって $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$ は定数である。$x = 0$ においてこれは $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$ に等しいので

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

である。小問 (ii) より、各正の整数 n に対して

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

となる。

考えてみよう $F(1) > 0$ であることはどうしてわかるのか。$F(1)$ について直接は何も与えられていない。

すべての x に対して $F'(x) = f(x) > 0$ なので、F は狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって $F(1) > F(0) = 0$ である。（積分で考えたいなら、$F(1)$ は 0 から 1 までの正の曲線の下の面積である。）

ゆえに $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$ であり、$0 < r < 1$ を満たす定数 r に対しては $n \to \infty$ のとき $r^n \to 0$ となる。よって $n \to \infty$ のとき $y(n) \to 0$ であり、これが示すべきことであった。

ここで主張しているのは整数上での極限だけであることに注意しよう。整数と整数の間では y ははさみうちにされる。F は増加関数なので y は減少関数であり、実際には x がすべての実数値をとりながら $x \to \infty$ となるときにも $y(x) \to 0$ が成り立つ。

検算

$f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$ のとき、正弦関数は 1 周期にわたって積分すると 0 になるので、$F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）により、$F(2), F(3), F(5), F(7)$ は 10^{-12} より高い精度でそれぞれ $4, 6, 10, 14$ に等しいことが確かめられる。$y(0) = 1$ から微分方程式を数値的に解き進めると（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））、$y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$ および $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$ が得られ、$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ と一致する。さらに、対称性の低い例 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$ について、整数でない x においても $F(x+1) - F(x) = F(1)$ が成り立つことを確かめた。

よくある間違い

- $[k, k+1]$ 上の面積が $[0, 1]$ 上の面積に等しい理由を示さずに、周期性から $F(n) = nF(1)$ は「自明」であると書いてしまう。関数 $G(x) = F(x+1) - F(x)$ か置換積分が必要である。
- $F(1) > 0$ の根拠を示し忘れる。これがなければ、$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ は 1 のままかもしれないし、発散するかもしれない。
- 積分因子の符号を誤り、減衰するどころか増大する $y = \mathrm{e}^{F(x)}$ にたどり着いてしまう。

STEP のその先へ

これは**フロケ理論**（Floquet theory）の最も簡単な場合である。周期的な係数をもつ線形微分方程式では、1 周期後の解は初期値に一定の因子（ここでは $e^{-F(1)}$）を掛けたものになるので、長期的な振る舞いはその因子が 1 より小さいか大きいかで決まる。数の代わりに行列を用いた同じ考え方によって、支点を上下に揺さぶられる振り子の安定性が説明される。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、線形方程式と積分因子を丁寧に扱っており、次の一歩として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。