解答例

# STEP II 2001、第 7 問

純粋数学 • 複素数と回転

> **STEP II 2001、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q7

## 鍵となる考え方

正多角形（regular polygon）の周に沿って歩くと、どの辺も同じ長さであり、各頂点では同じ**外角**（exterior angle）だけ向きを変える。複素平面（Argand diagram）において角 $\theta$ だけ向きを変えることは $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることにあたるので、各辺は直前の辺に一定の複素数を掛けたものになる。頂点がわかれば中心は垂直二等分線（perpendicular bisector）から求まり、回転（rotation）は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ をもう一度掛けるだけである。

## 解答

### $Q$ と $S$ を求める

各頂点における内角（interior angle）は $5\pi/6$ であるから、各頂点で進行方向は外角 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$ だけ回る。多角形は上半平面（upper half-plane）にあり、$O$ から $P$ へ実軸の正の向きに進み始めるので、向きの変え方は**反時計回り**でなければならない（$P$ で時計回りに曲がると $Q$ が実軸より下に来てしまう）。

$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とおく。辺 $\overrightarrow{OP}$ は複素数 2 であり、以降の各辺は直前の辺に $\omega$ を掛けたもの（同じ長さで、$\pi/6$ だけ回したもの）である。よって

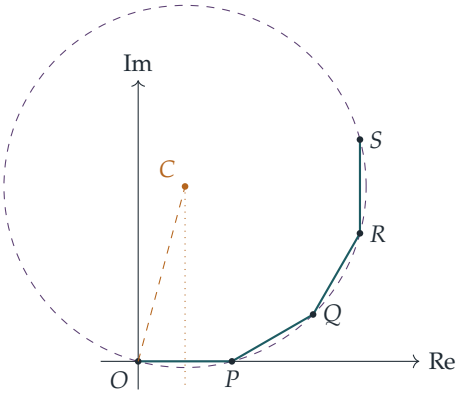
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + \mathrm{i},\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

これらを足し合わせると、

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

1 行目が求める $Q$ の値であり、

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$




**中心 $C$**

$O, P, Q$ を通る円は正十二角形全体の外接円（circumcircle）であるから、$C$ は多角形の中心である。$C$ は $O$ と $P = 2$ から等距離にあるので、垂直二等分線 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 上にある。そこで $C = 1 + h\mathrm{i}$ とおく。$C$ は $O$ と $Q$ からも等距離にあるから、

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

よって $h = 2 + \sqrt{3}$ であり、$C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$ は第 1 象限にある。

**考えてみよう** $C$ の偏角を正確に求めるといくらか？

$\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$ となる角が必要である。ここで

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

であり、$C$ は第 1 象限にあるので、偏角（argument）は $\arg C = 5\pi/12$ である。（幾何学的に見ると、三角形 $OCP$ は $C$ における頂角が $2\pi/12$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、底角は $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$ となる。）

### 回転

$O$ のまわりに角 $\theta$ だけ反時計回りに回転することは、すべての点に $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることであるから、$C$ の偏角は $5\pi/12+\theta$ になる。$C$ が実軸上に来るためには $5\pi/12+\theta$ が $\pi$ の整数倍でなければならない。最小の正の $\theta$ は

$$\theta=\pi-\tfrac{5\pi}{12}=\tfrac{7\pi}{12},$$

であり、このとき $C$ は実軸の**負の部分**に来る。

次に $S$ を極形式（modulus–argument form）で表す。$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ であるから、$S=(3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ である。$S$ の移動後の位置は

$$\begin{aligned}S'=S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12}&=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)}=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}\\&=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}),\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

## 検算

- $|C|^2=1+(2+\sqrt{3})^2=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$ であり、$|C-S|^2=(2+\sqrt{3})^2+1$ も同じ値なので、$S$ は確かに同じ円周上にある。
- $|S'|=3\sqrt{2}+\sqrt{6}=|S|$ であり、回転で保たれるべき性質が成り立っている。
- 数値的には $S\approx 4.732+4.732\mathrm{i}$、$S'\approx -5.7956+3.3461\mathrm{i}$ である。コンピュータにより、すべての辺の長さ、$5\pi/6$ の角、そして $7\pi/12$ が $C$ を実軸上に移す最初の反時計回りの角であることが確認された。

## よくある間違い

- 外角 $\pi/6$ ではなく内角 $5\pi/6$ だけ向きを変えてしまう。
- $-5\pi/12$（時計回り）や $\pi/2-5\pi/12$ だけ回転させてしまう。回転は反時計回りであり、$C$ が最初に実軸に達するのは負の部分である。

## STEP のその先へ

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることを回転とみなすのは、複素関数を幾何学的な変換として捉える第一歩である。$z\mapsto az+b$ によって平面のあらゆる回転・拡大・平行移動が得られ、これらは群（group）をなす。正多角形の頂点は等比数列の和（geometric sum）

$2(1+\omega+\cdots+\omega^{k-1})$ で表され、1 の累乗根（roots of unity）へとつながる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この幾何学的な視点を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。