解答例

STEP II 2001、第 6 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2001、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q6

鍵となる考え方

一見扱いにくそうな $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ は、実は $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$ が姿を変えたものにすぎない。これは正接の減法定理（tangent subtraction formula）を逆向きに読んだものである。このことに気づけば、小問 (i) は部分積分（integration by parts）によってちょうど最初の積分に帰着する。小問 (ii) は無関係に見えるが、写像 $y = \frac{1-x}{1+x}$ は 0 と 1 を入れ替え、しかも自分自身が逆写像（inverse）になっている。したがって、この置換（substitution）を行えば (ii) は (i) に戻る。

解答

最初の積分

x^4 を $1 + x^2$ で割る（あるいは $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$ と書く）と

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

を得る。よって

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

となり、題意が示された。

小問 (i)

$\theta = \tan^{-1} x$ とおくと、$0 \le x \le 1$ のとき $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ である。減法定理により

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-x}{1+x}.$$

考えてみよう $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{1-x}{1+x}$ から、本当に $\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x}) = \frac{\pi}{4} - \theta$ と書いてよいだろうか？

それが許されるのは、$\frac{\pi}{4} - \theta$ が $\tan^{-1}$ の値域（range）$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に入っているときに限る。いまの場合 $0 \le \frac{\pi}{4} - \theta \le \frac{\pi}{4}$ なので条件は満たされ、積分区間全体で

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x.$$

が成り立つ。

したがって

$$\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3 \tan^{-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} - J,$$

である。ここで $J = \int_0^1 x^3 \tan^{-1} x\,\mathrm{d}x$ とした。$u = \tan^{-1} x$、$\mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x$（したがって $v = \frac{1}{4}x^4$、$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$）として部分積分すると、最初の結果を用いて

$$\begin{aligned} J &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 \tan^{-1} x\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

となる。よって

$$\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}.$$

小問 (ii)

考えてみよう 奇妙な重み $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$ はどこから来たのだろうか？

これは、同じ変換のもとで $x^3\,\mathrm{d}x$ が変化した結果である。$y = \frac{1-x}{1+x}$ と置換する。これを解くと $x = \frac{1-y}{1+y}$ となる。すなわち、この写像は自分自身の逆写像であり、$x = 0$ を $y = 1$ に、$x = 1$ を $y = 0$ に移す。このとき

$$1 - y = \frac{2x}{1+x}, \qquad 1 + y = \frac{2}{1+x}, \qquad \mathrm{d}y = -\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

であるから

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y = \frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、また $\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ である。負号は積分の上端と下端を入れ替えることで吸収される（y が 0 から 1 まで動くとき、x は 1 から 0 まで動く）。小問 (i) により

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\tan^{-1}y\,\mathrm{d}y &= \int_1^0\left(-\frac{x^3}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

を得る。

検算

- どちらの答えも、当然そうあるべきように正である（各被積分関数は $[0,1]$ 上で非負である）：$\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\approx 0.02968$、$\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\approx 0.01484$。元の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで一致する。
- (ii) の答えはちょうど (i) の答えの半分である。このことは、式変形を始める前に数値的に確かめておくことができる。
- 恒等式に $x=0$ を代入すると $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$、$x=1$ を代入すると $\tan^{-1}0 = 0$ となる。いずれも $\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ と一致する。

よくある間違い

- (ii) で $\mathrm{d}y$ を書き忘れたり、符号の扱いを誤ったりすること。因子 $-\frac{2}{(1+x)^2}$ の負号と、上端・下端の入れ替えによる負号とが互いに打ち消し合うのである。
- 値域を確認せずに $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ と書くこと。$x<-1$ のときはこれは誤りである（π だけずれる）。

STEP のその先へ

置換 $y=\frac{1-x}{1+x}$ はメビウス変換（Möbius transformation）、すなわち $\frac{ax+b}{cx+d}$ の形の写像である。これらの写像は合成（composition）に関して群（group）をなし、今回の写像は位数（order）2 の元である。同じ技法を対称性と組み合わせると、有名な結果 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2$ が得られる。次にぜひ挑戦してみる価値がある。メビウス変換は複素解析（complex analysis）において中心的な役割を果たす。Needham の *Visual*

Complex Analysis（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの変換を幾何学的に美しく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。