解答例

STEP II 2001、第 5 問

純粋数学 ・ 停留点と積分

STEP II 2001、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q5

鍵となる考え方

停留点（stationary point）は勾配（gradient）から直接求まる。停留点は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となる点であり、その種類は勾配の符号がどう変化するかで決まる。指数関数（exponential）の因子はつねに正なので、この符号は多項式の因子 $x(1-x^2)$ だけで決まり、これは二つの曲線で共通である。高さについては、一つ目の勾配は厳密に積分できる（$u = x^2$ に気づけばよい）。二つ目はそうはいかないが、その値は必要なく、二つの積分を比較するだけでよい。

解答

曲線 C_1

すべての x について $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ であるから、勾配がゼロになるのは $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$ のとき、すなわち $x = -1, 0, 1$ のときに限る。また、勾配の符号は $x(1-x)(1+x)$ の符号と一致する：

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号	$+$	$-$	$+$	$-$

$x = 0$ で勾配は負から正に変わるので、原点（これは曲線上にある）は極小点（minimum）である。$x = 1$ では正から負に変わるので、これは極大点（maximum）である。同様に $x = -1$ も極大点である。

高さを求めるために積分する。曲線は原点を通るので、

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ はどう積分すればよいか？

t^2 の関数の隣に因子 t があることから、$u=t^2$, $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$ とおくことを考える：

$$y=\tfrac{1}{2}\int_0^{x^2}(1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

ここで $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u\mathrm{e}^{-u})=\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-u}=(1-u)\mathrm{e}^{-u}$ であることに注意する（部分積分（integration by parts）でも同じ結果が得られる）。したがって

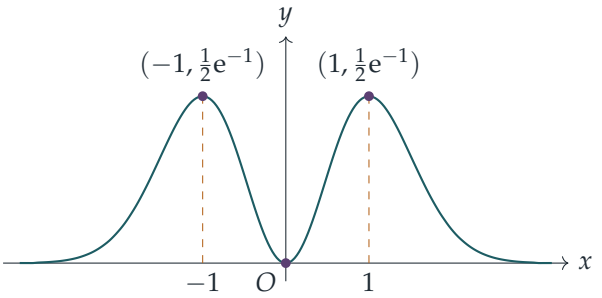
$$y=\tfrac{1}{2}\Big[u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^{x^2}=\tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ となるので、極大点は $(1,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1})$ であり、題意が示された。y は x の偶関数（even function）であるから、もう一つの停留点は極大点

$$(-1,\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}).$$

である。

概形のスケッチ。 $y=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ から次のことがわかる。曲線は y 軸に関して対称であり、$y\geq 0$ で、等号は原点でのみ成り立つ。また、指数関数の減衰は x^2 の増加より速いので、$x\to\pm\infty$ のとき $y\to 0$ である。したがって曲線は「ふたこぶ」の形をしている。原点で x 軸に接し、$x=\pm1$ で等しい二つの極大値（高さ $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\approx 0.18$）まで上がり、その後両側で x 軸に向かって減衰していく。（下図では縦方向を拡大している。）



曲線 C_2

ここでもすべての x について $\mathrm{e}^{-x^3}>0$ であるから、勾配がゼロになるのはちょうど $x=-1,0,1$ のときであり、その符号は $x(1-x)(1+x)$ の符号と一致するので、符号表は先ほどとまったく同じになる。したがって原点（仮定より曲線上にある）は極小点であり、$x=1$ の停留点は極大点である。（$x=-1$ の停留点も極大点であるが、これは問われていない。）

その高さは

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

である。これは初等的な原始関数（antiderivative）をもたないので、代わりに C_1 の積分と比較する。その値は $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ であることがわかっている。

考えてみよう k の値を求めずに、k と $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ を比較するにはどうすればよいか？

被積分関数（integrand）どうしを比較する。$0 < x < 1$ のとき $x^3 < x^2$ である（$x < 1$ の両辺に $x^2 > 0$ を掛ける）。よって $-x^3 > -x^2$ であり、e^t は増加関数であるから $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ となる。また、この範囲では $x(1-x^2) > 0$ であるから、これを掛けても不等号の向きは変わらない：

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{ただし} 0 < x < 1.$$

二つの被積分関数はともに $[0,1]$ で連続であり、開区間では不等式が厳密に（等号なしで）成り立つので、$[0,1]$ で積分すると厳密な不等式が得られる：

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

最後の等号は、上で求めた $x = 1$ における C_1 の高さによる。したがって極大点は $(1,k)$ であり、$k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ が成り立つ。これで題意が示された。

検算

$\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ を積の微分法（product rule）で微分すると $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ となり、$x = 0$ で値は 0 であるから、C_1 の式は正しい。第二次導関数（second derivative）によっても分類が確かめられる：どちらの曲線についても $y''(0) = 1 > 0$ かつ $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）で数値計算すると $k \approx 0.2034$ となり、一方 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$ である。

よくある間違い

- 積分定数（constant of integration）を忘れる。これを定めるのは「原点を通る」という条件であり、高さを求めるうえで重要である。
- $x(1-x^2)$ が $(0,1)$ で正であることに触れずに、$\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ だから $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ であると主張する。負の因子を掛けると不等号の向きは逆になってしまう。

- $x^3 < x^2$ が「すべての x について」成り立つと言ってしまう。これが成り立つのは $x < 1, x \neq 0$ のときだけであり、だからこそ区間 $[0,1]$ がまさに必要なものなのである。

STEP のその先へ

第二の部分は比較による議論（comparison argument）である。書き下すことのできない解について、書き下せる解と比較することで情報を得るのである。この考え方は微分方程式（differential equation）の理論全体を貫いており、そこでは比較定理（comparison theorem）によって扱いにくい方程式の解がより単純な方程式の解で評価される。また解析学（analysis）でも同様で、積分の単調性（monotonicity）は基本的な道具である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、公式に頼らずに解について定性的にどれだけのことが言えるかを知るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。