解答例

STEP II 2001、第 4 問

純粋数学 ・ 倍角を含む方程式

STEP II 2001、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q4

鍵となる考え方

f のどの項も因数 $\sin x$ をもつ。実際 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ であり、ヒントは $\sin 3x$ についても同じことを与えている。$\sin x$ をくくり出すと $\cos x$ の二次式（quadratic）が残り、P, Q, R に関する条件はまさに「この二次式の判別式（discriminant）が負である」ということである。後半は同じ関数で $P = 1, Q = 1, R = -1$ とし、x を $2nx$ に置き換えたものである。今度は二次式が実数解をもつので、許された範囲の上端にどの解がもっとも近いかを見つけることが仕事になる。

解答

前半の結果

$c = \cos x$ とおく。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ と、$\sin 3x$ について与えられた恒等式（identity）を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)). \end{aligned}$$

よって $\mathrm{f}(x) = 0$ となるのは、$\sin x = 0$ または $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$ のとき、かつそのときに限る。

まず $R \neq 0$ である。もし $R = 0$ なら条件は $Q^2 < 0$ となり、これは不可能だからである。したがって括弧内は c の真の二次式であり、その判別式は仮定により

$$(2Q)^2 - 4 \cdot 4R\,(P - R) = 4(Q^2 - 4R(P - R)) < 0$$

である。判別式が負の実係数二次式は実数解をもたないので、括弧内はどんな実数 c

に対しても 0 にならず、特に $c = \cos x$ に対しても 0 にならない。ゆえに $\mathrm{f}(x) = 0$ ならば $\sin x = 0$、すなわち m を整数として $x = m\pi$ である。逆に、$x = m\pi$ はすべて f の零点であるから、これらがちょうど零点全体であり、示すべきことが示された。

g の最大の解

$y = 2nx$ とおく。すると $\mathrm{g}(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$ であり、これは $P = 1, Q = 1, R = -1$ としたときの $\mathrm{f}(y)$ である。このとき $Q^2 = 1$ は $4R(P - R) = -8$ より小さくないので、前半の結果は適用できず、二次式は実数解をもつ。$c = \cos y$ とすると、上の因数分解（factorisation）により

$$\mathrm{g}(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

よって $\mathrm{g}(x) = 0$ となるのは

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad \text{または} \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

のとき、かつそのときに限る。$\cos y = 1$ の場合はすでに $\sin y = 0$ に含まれている。したがって y に関する解は

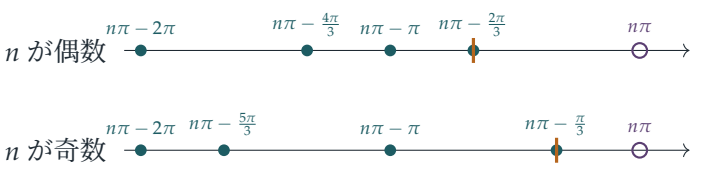
$$y = k\pi \quad \text{または} \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

である。各周期（period）$[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ の中で、解は $2k\pi$ に 0, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ を加えた位置にある。

範囲 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ は $0 < y < n\pi$ となり、右端 $y = n\pi$ 自体は解であるが除外される。そこで $n\pi$ より真に小さい最大の解を求めればよく、問題になるのは $n\pi$ がその周期の中でどの位置にあるかだけである。

考えてみよう なぜ n の偶奇（parity）が問題になるのか？

解の並び方は π ごとではなく 2π ごとに繰り返す。n が偶数なら $n\pi$ は 2π の倍数であり、n が奇数なら $n\pi$ は π の奇数倍である。この二つの場合で、$n\pi$ のすぐ下にある解の間隔が異なる。



（$n\pi$ より下の最後の 2π の範囲における、y で表した g の解を縮尺どおりに描いたもの。白丸は除外される端点を、琥珀色の目盛りは最大の解を示す。）

n が偶数のとき。このとき $k = \frac{n}{2} \geq 1$ として $n\pi = 2k\pi$ であり、その下の最後の周期にある解は、$n\pi$ から測って

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

である。このうち最後のものは $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$ であり、その余弦が $-\frac{1}{2}$ なので解である。$\left(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi\right)$ には解がない。そこには π の倍数は存在せず、また $\cos y = -\frac{1}{2}$ となるには $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ または $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ が必要であるが、ここでは y は 2π を法として $\frac{4\pi}{3}$ と 2π の間に真に含まれるからである。また $n \geq 2$ より $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$ である。よって最大の解は $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$ であり、

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n \text{ が偶数}).$$

n が奇数のとき。このとき $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$ として $n\pi = 2k\pi + \pi$ である。$2k\pi = n\pi - \pi$ から始まる周期の中で測ると、$n\pi$ より下の解はずれ 0 と $\frac{2\pi}{3}$ の位置にあるので、候補は $n\pi - \pi$ と $n\pi - \frac{\pi}{3}$ である。区間 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$ は、2π を法として y が $\frac{2\pi}{3}$ と π の間に真に含まれることに対応し、そこには解がない。また $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$ である。よって最大の解は $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$ であり、

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n \text{ が奇数}).$$

検算

$n = 1$ のとき、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $\mathrm{g}(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$ である。公式は $x = \frac{\pi}{3}$ を与え、実際 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$ である。$n = 2$ のときも公式は $\frac{\pi}{3}$ を与える（$y = \frac{4\pi}{3}$）。$n \to \infty$ のとき、どちらの公式も $\frac{1}{2}\pi$ に近づく。解が密集していくのだから、そうなるはずである。$n = 1, \ldots, 12$ について、細かい格子上で g を数値的に調べた。予測された値（たとえば $n = 3$ のとき $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$）はどれも解であり、その値と $\frac{1}{2}\pi$ の間で g の符号は一定である。前半については、$Q^2 < 4R(P-R)$ を満たすランダムな三つ組 2000 個について、括弧内はいずれも $[-1, 1]$ 上に零点をもたなかった。

よくある間違い

- $x = \frac{1}{2}\pi$ そのものを答えてしまう。これはどの n に対しても g の解であるが、開区間（open interval）の外にある。
- $\sin y = 0$ から来る解を忘れ、$\cos y = -\frac{1}{2}$ だけを残してしまう。n が偶数のとき、$y = n\pi - \pi$ は最大ではないが解である。

- $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ だけを書き、$\frac{4\pi}{3}$ の系列を見落とす。これでは n が偶数のときに誤った答えになる。

STEP のその先へ

この因数分解がうまくいくのは、$\sin mx / \sin x$ がつねに $\cos x$ の多項式だからである。これは第二種チェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials of the second kind）$U_{m-1}(\cos x)$ にほかならない。したがって任意の有限の正弦級数 $\sum a_m \sin mx$ は $\sin x$ と $\cos x$ の多項式との積であり、その零点を数えることは $[-1, 1]$ における多項式の根を数えることに帰着する。この考え方は近似理論（approximation theory）やフーリエ解析（Fourier analysis）の多くの部分の土台となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、e^{ix} を通して倍角の公式を眺める見事な視点を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。