解答例

STEP II 2001、第 3 問

純粋数学 ・ ユークリッド幾何

> **STEP II 2001、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q3

鍵となる考え方

直方体（cuboid）を座標空間に置き、1 つの頂点を原点に、辺を座標軸に沿わせる。すると各頂点の位置ベクトル（position vector）はすぐにわかり、対角線（diagonal）はそれらの差にすぎず、対角線どうしのなす角は内積（scalar product）からただちに求まる。体積（volume）と表面積（surface area）の比は λ の簡単な有理関数（rational function）であり、最後の小問では R に関する条件を λ に関する条件に書き換えることで、2 つの結果を結びつける。

解答

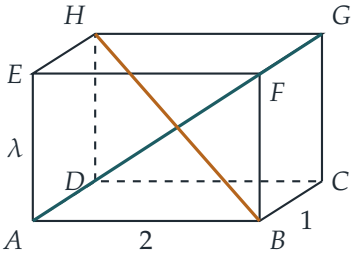
対角線のなす角

辺 AE, BF, CG, DH は面に垂直であるから、頂点における角はすべて直角である。したがって A を原点とし、AB, AD, AE に沿って座標軸をとることができる：

$$A = (0,0,0), \quad B = (2,0,0), \quad C = (2,1,0), \quad D = (0,1,0),$$

上面は下面を λ だけ持ち上げたものであるから、

$$E = (0,0,\lambda), \quad F = (2,0,\lambda), \quad G = (2,1,\lambda), \quad H = (0,1,\lambda).$$



2本の対角線の方向ベクトル（direction vector）は

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

であり、長さはいずれも $\sqrt{5+\lambda^2}$ である。また

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

これら2つのベクトルのなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5 + \lambda^2}.$$

考えてみよう 絶対値（modulus）の記号はどこから出てくるのだろうか？

交わる2直線は2つの角 θ と $\pi - \theta$ をなし、その余弦は互いに符号が逆である。鋭角（acute angle）のほう（$\lambda^2 = 3$ のときは直角）は余弦が負でないほうであるから、

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3 - \lambda^2}{5 + \lambda^2}\right|,$$

となり、示すべき式が得られた。

比 R

体積は $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$ である。表面は、面積がそれぞれ $2 \times 1, 2 \times \lambda, 1 \times \lambda$ である面が2枚ずつからなるので、表面積は $2(2 + 3\lambda)$ である。よって

$$R = \frac{2\lambda}{2(2 + 3\lambda)} = \frac{\lambda}{2 + 3\lambda}.$$

$\lambda > 0$ より分母は正であり、

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

これは正しい。したがって、とりうるすべての λ について $R < \frac{1}{3}$ である。（$\lambda \to \infty$ のとき $R \to \frac{1}{3}$ となるので、この評価はこれ以上改善できない。）

最後の小問

ここでも $2+3\lambda>0$ であるから、両辺に掛けてよい：

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2+3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

そこで $\lambda \geq 2$ と仮定する。すると $\lambda^2 \geq 4 > 3$ より $\lambda^2 - 3 > 0$ であるから、絶対値を外せる：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2-3}{\lambda^2+5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2+5}.$$

このように書くと、λ^2 が増加すると $\cos\alpha$ も増加することがわかる。$\lambda^2 \geq 4$ のとき $\lambda^2+5 \geq 9$ であるから、

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

α と $\arccos\frac{1}{9}$ はともに $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属し、この区間で余弦は狭義単調減少であるから、$\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$ より

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

が得られ、これが示すべきことであった。等号が成り立つのは $\lambda = 2$、すなわち $R = \frac{1}{4}$ のときであり、かつそのときに限る。

検算

- $\lambda^2 = 3$ のとき、公式は $\cos\alpha = 0$ を与える。確認：$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = -4+1+3 = 0$ であり、確かに対角線は垂直である。
- $\lambda \to \infty$ のとき、直方体は細長く背の高い角柱になり、2 本の対角線はどちらもほぼ鉛直になるので $\alpha \to 0$ となるはずである。公式は $\cos\alpha \to 1$ を与え、期待どおりである。
- $\lambda = 2$ のとき：体積は 4、表面積は $2(2+4+2) = 16$ であるから $R = \frac{1}{4}$ であり、$\cos\alpha = \frac{1}{9}$ より $\alpha \approx 83.6^\circ$ である。λ の値を 10^5 個ランダムにとった数値検証により、角の公式、$R < \frac{1}{3}$、および $R \geq \frac{1}{4}$ のときは常に $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$ となることが確かめられた。

よくある間違い

- 絶対値を忘れる：$\lambda^2 < 3$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は鈍角（obtuse angle）であり、鋭角はその補角（supplement）である。
- 最後の不等式の向きを誤る：$[0, \frac{\pi}{2}]$ では余弦は減少するので、余弦が**大きい**ほど角は**小さい**。

STEP のその先へ

図形を座標空間に置き、内積を使って角を求めるのはベクトル幾何の基本的な道具であり、大学 1 年の線形代数（linear algebra）の講義では、任意の次元の一般の内積（inner product）へと一般化される。$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトルのなす角は $\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$ によって**定義**され、この値が $[-1,1]$ に収まることはコーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）によって保証される。よい演習問題として、n 次元の単位立方体の長い対角線が各辺となす角の余弦は $1/\sqrt{n}$ であり、したがって n が大きくなるにつれてその角は直角に近づくことを示してみるとよい。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方をわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。