解答例

STEP II 2001、第 2 問

純粋数学 • 整数部分の和

> **STEP II 2001、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q2

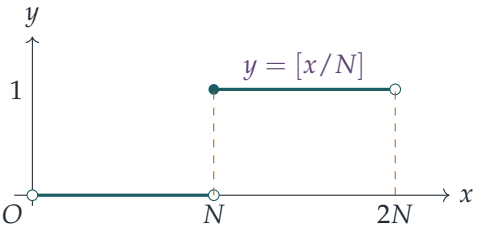
鍵となる考え方

一見扱いにくい指数（exponent）$[k/N]$ は、k が 1 から $2N$ まで動くとき 3 つの値しかとらず、グラフを描けばどこで値が跳ぶかが正確にわかる。それがわかれば、符号 $(-1)^{[k/N]}$ は k の 3 つのブロックそれぞれの上で一定となるので、各和はブロックごとに等差数列の和（arithmetic series）（小問 (i)）または等比級数（geometric series）（小問 (ii)）に分かれる。注意が必要なのはブロックの端点だけである。

解答

グラフの概形

$0 < x < N$ のとき $0 < x/N < 1$ であるから $[x/N] = 0$ である。$N \le x < 2N$ のとき $1 \le x/N < 2$ であるから $[x/N] = 1$ である。グラフは階段状になる。値の跳びは $x = N$ で起こり、そこでは関数はすでに値 1 をとる。また右端 $x = 2N$ は含まれない（そこでの値は 2 になる）。



黒丸の点は含まれ、白丸の点は含まれない。

和を求めるには整数値 $k = 1, 2, \ldots, 2N$ を考えればよい。グラフから読み取ると（端点 $k = 2N$ も加えて）次のようになる。

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

したがって $(-1)^{[k/N]}$ は、$k \le N-1$ では $+1$、$N \le k \le 2N-1$ では -1、そして最後の 1 項 $k = 2N$ では再び $+1$ である。（$N = 1$ のときは最初のブロックは空であるが、空和（empty sum）は 0 なので、以下の式はすべてそのまま成り立つ。）

> **考えてみよう** なぜ単純に「最初の N 項の符号は $+$、次の N 項の符号は $-$」と言ってはいけないのだろうか？

値の跳びがちょうど N の倍数のところにあるからである。$k = N$ の項ではすでに $[k/N] = 1$ であり、最後の項 $k = 2N$ では $[k/N] = 2$ なので、この項は正になる。この 2 つの端点を正しく扱うことこそが、この問題のすべてである。

小問 (i)

3 つのブロックに分けると、

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \; - \sum_{k=N}^{2N-1} k \; + \; 2N.$$

最初の和は $\frac{1}{2}(N-1)N$ である。2 番目の和は N から $2N-1$ までの N 項からなるので、N に初項と末項の平均を掛けたものに等しく、$\frac{1}{2}N(3N-1)$ である。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}(N^2 - N) - \tfrac{1}{2}(3N^2 - N) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

同じように分けると

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \; - \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \; + \; 2^{-2N}.$$

どちらの和も公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数である。$\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}\bigl(1-2^{-(b-a+1)}\bigr)\big/\frac{1}{2} = 2^{1-a}-2^{-b}$ を用いると、

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$
$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

$t = 2^{-N}$ とおくと、これは $1-4t+3t^2$ となり、きれいに因数分解できる。

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \Bigl(1-\frac{1}{2^N}\Bigr)\Bigl(1-\frac{3}{2^N}\Bigr).}$$

$N \to \infty$ のとき $2^{-N} \to 0$、$4^{-N} \to 0$ であるから、

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

これは納得のいく結果である。N が大きくなると、正のブロック $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ は長くなってその和は 1 に近づき、一方で負のブロックはずっと先から始まるので、その合計はおよそ 2^{1-N} であり無視できるほど小さい。

検算

- $N=1$：項は $[1]=1$ の $k=1$ と、$[2]=2$ の $k=2$ である。小問 (i) は $-1+2=1=2-1$ を与え、小問 (ii) は $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ を与え、$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$ と一致する。
- $N=2$：$k=1,2,3,4$ に対する符号は $+,-,-,+$ である。このとき $1-2-3+4=0=4-4$、$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$ である。
- 1 から 59 までのすべての N について、両方の公式を分数を用いて厳密に確かめた。例えば $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$ である。

よくある間違い

- $k=N$ を正のブロックに入れてしまう、あるいは最後の項 $k=2N$ の指数が 2 であり、したがって正であることを忘れる。
- $\sum_{k=N}^{2N-1}$ の項数を数え間違える。項数は N であり、$N-1$ ではない。

STEP のその先へ

整数部分（integer part）を表す関数、すなわち床関数（floor function）は整数論の至るところに現れる。典型的な例はルジャンドル（Legendre）の公式で、$n!$ を割り切る素数 p の最大のべき指数は $\sum_{j\geq 1}[n/p^j]$ であることを述べている。また小問 (ii) のように符号のパターンがブロックごとに変わる和は、級数の項の並べ替えやまとめ方への穏やかな入門にもなっており、これは解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、床関数が活躍する様子を見るのに格好の一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。