解答例

# STEP II 2001、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン近似

> **STEP II 2001、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q12

## 鍵となる考え方

共同購入グループ（syndicate）は当たりくじをちょうど 1 枚持つことが保証されているので、すべては当選番号を選んだ**ほかの**購入者が何人いるかにかかっている。その人数は試行回数が非常に大きく成功確率が非常に小さい二項分布（binomial distribution）に従い、これはまさにポアソン分布（Poisson distribution）による近似が効く状況である。このとき取り分の期待値（expectation）は $W$ と $1/(1+X)$ の期待値の積となり、その和は $k+1$ を階乗（factorial）に取り込むことで閉じた形で計算できる。

## 解答

### 設定

共同購入グループは $N$ 枚のくじを買ったので、ほかの購入者が買ったくじは $3.8N - N = 2.8N$ 枚である。グループ以外のくじのうち当選番号が書かれたものの枚数を $X$ とする。

グループ以外の購入者はそれぞれ、ほかの購入者とも抽選とも独立に、一様ランダムに番号を選ぶ。したがって当選番号が何であっても、その各くじは独立に確率 $1/N$ で当選番号と一致する。よって

$$X \sim \mathrm{B}\left(2.8N,\ \tfrac{1}{N}\right).$$

$N$ は非常に大きいので、平均 $2.8N \cdot \frac{1}{N} = 2.8$ を一定に保ったまま $2.8N$ は大きく $1/N$

は小さい。ゆえに $X$ は近似的に平均 $\lambda = 2.8$ のポアソン分布に従う：

$$\mathrm{P}(X = k) \approx \frac{\mathrm{e}^{-2.8}\,(2.8)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

共同購入グループは各番号のくじをちょうど 1 枚ずつ持っているので、常に当たりくじをちょうど 1 枚持っており、当たりくじの総数は $T = 1 + X$ である。

### 当たりくじの枚数として最も起こりやすい値

$p_k = \mathrm{P}(X = k)$ とおく。隣り合う確率を比べると

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} = \frac{2.8}{k},$$

であり、これは $k \le 2$ のとき 1 より大きく、$k \ge 3$ のとき 1 より小さい。よって $p_0 < p_1 < p_2$ かつ $p_2 > p_3 > p_4 > \cdots$ であり、$X$ の最も起こりやすい値は 2 である。（正確な二項分布でも同じことが成り立つ。その場合 $p_k/p_{k-1} = \frac{(2.8N - k + 1)}{k(N-1)}$ であり、これが 1 を超えるのはちょうど $k < 2.8 + \frac{1}{N}$ のときである。）

したがって、当たりくじの枚数として最も起こりやすい値は

$$T = 1 + 2 = 3.$$

### 純損失の期待値

賞金は $T = 1 + X$ 枚の当たりくじで等分され、共同購入グループはそのうち 1 枚を持つので、受け取る額は $\dfrac{W}{1+X}$ である。グループは £$N$ を支払ったので、純損失は

$$L = N - \frac{W}{1+X}, \qquad \text{かつ} \qquad \mathrm{E}(L) = N - W\,\mathrm{E}\!\left(\frac{1}{1+X}\right).$$

**考えてみよう** $\sum \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ はどのように和を求めればよいか？

要点は $(k+1)\cdot k! = (k+1)!$ であり、厄介な因子 $\frac{1}{k+1}$ が階乗に吸収されることである。$\lambda$ を掛けて割ると、和は 1 項だけ欠けたポアソン級数になる：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\!\left(\frac{1}{1+X}\right) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda},\end{aligned}$$

ここで $j = k + 1$ とおき、$\sum_{j \ge 0} \lambda^j / j! = \mathrm{e}^{\lambda}$ を用いて、値が 1 である $j = 0$ の項を取り除いた。

$\lambda = 2.8 = \frac{14}{5}$ のとき、これは $\frac{5}{14}\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)$ となるので

$$\mathrm{E}(L) \approx N - \frac{5\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)}{14} W,$$

となり、示すべき式が得られた。

## 検算

- 同じ工夫は正確な二項分布 $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ にも使える：$\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$ であり、$np = \lambda$ を保って $n \to \infty$ とするとこれは $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda$ に近づく。$N = 1000$ のとき正確な値は 0.33536 であり、ポアソン近似の値 $\frac{5}{14}(1 - \mathrm{e}^{-2.8}) \approx 0.33542$ と比べられる。
- $N = 200$ で $10^5$ 回の抽選をシミュレーションしたところ、取り分の平均は $0.335W$ となり、当たりくじ 3 枚が最も頻繁に起こる結果であった。
- 極限の場合：ほかに誰も参加しなければ（$\lambda \to 0$）、$(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda \to 1$ となり、共同購入グループは賞金をすべて受け取る。当然そうなるべきである。

## よくある間違い

- ほかの購入者のくじの枚数として $2.8N$ ではなく $3.8N$ を使ってしまうこと。共同購入グループ自身のくじはランダムではなく、当たりくじをちょうど 1 枚もたらす。
- $\mathrm{E}\left(\frac{W}{1+X}\right) = \frac{W}{1+\mathrm{E}(X)} = \frac{W}{3.8}$ と書いてしまうこと。期待値は非線形な関数の中に入れることはできない。実際 $\frac{1}{3.8} \approx 0.263$ は 0.335 より明らかに小さい（$1/(1+x)$ は凸（convex）なので、イェンセンの不等式（Jensen's inequality）によりこれより大きくはなりえない）。

## STEP のその先へ

$\mathrm{B}(n, \lambda/n)$ を $\mathrm{Po}(\lambda)$ で近似することは「少数の法則（law of rare events）」と呼ばれ、大学 1 年の講義では確率、あるいは確率母関数（probability generating function）が収束することを示してこれを証明する。$\mathrm{E}\left(1/(1+X)\right)$ の計算は実は母関数の積分 $\int_0^1 G_X(s)\,\mathrm{d}s$ であり、平均や分散の計算にとどまらない母関数の見事な応用である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。