解答例

STEP II 2001、第 11 問

力学 ・ 放物運動

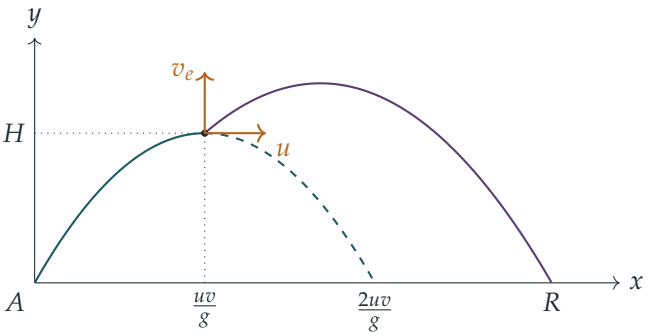
> **STEP II 2001、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q11

鍵となる考え方

飛行を爆発の時点で二つに分ける。爆発の前は通常の放物運動（projectile motion）であり、最高点は鉛直方向の速度がゼロになる点である。爆発の後、破片 P はその高さから速度 (u, v_e) で打ち出された新たな放物体とみなせるので、着地までの時間は二次方程式（quadratic equation）から求まる。後半では、到達距離（range）が v_e の増加関数（increasing function）であることから、「$R > D$」は「v_e が、ちょうど $R = D$ となる値を超える」という条件に言い換えられる。

解答

ミサイルと破片 P を、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化し、地面は水平とする。A を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。



破線は爆発がなかった場合にミサイルが着地したであろう軌道であり、紫の曲線は P の軌道である。

P の到達距離

爆発まで。鉛直方向の速度は $v - gt$ であり、これは $t_1 = v/g$ でゼロになる。その瞬間までにミサイルが水平方向に進んだ距離は

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

であり、その高さは、最終的な鉛直方向の速さがゼロであることと $v^2 = 2gH$ から

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

である。

爆発の後。破片 P は高さ H から、水平方向の速度 u、鉛直上向きの速度 v_e で運動を始める。爆発の時点から時間 t を測ると、その高さは

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。P は $y = 0$ のときに着地するので

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

となる。これを gt についての二次方程式とみなすと

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

を得る。二つの解の積は $-v^2 < 0$ であるから、一方の解は負である。この解は、放物線が爆発より**前**に地面と交わる時刻を表しており、ここでは無関係である。したがって、爆発後の飛行時間は

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

である。水平方向の速度は終始 u のままなので、水平方向の総距離は

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

すなわち

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

$R > D$ となる条件

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

とおく。このとき $R > D$ は $f(v_e) > k$ と同値である。$D > 2uv/g$ より $gD > 2uv$ であるから、$k > v > 0$ が成り立つ。

考えてみよう なぜ $R = D$ となる v_e の値をただ一つ求めれば十分なのだろうか。

それは f が狭義単調増加（strictly increasing）だからである。実際、

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

である。$v \neq 0$ のとき $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$ となるからである。（物理的には、上向きに強く打ち出すほど P は長く空中にとどまる。）よって $f(v_e^*) = k$ ならば、$f(v_e) > k$ となるのはちょうど $v_e > v_e^*$ のときである。

v_e^* を求めるため、$\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$ を解く。両辺を 2 乗すると

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

を得る。2 乗によって偽の解が紛れ込む可能性があるので、$k - v_e^* \geq 0$ を確かめておく。実際 $k - v_e^* = \dfrac{k^2 + v^2}{2k} > 0$ であるから、v_e^* は確かに $f(v_e^*) = k$ を満たす。
ここで k を代入する。

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

であるから

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

となる。以上より、f は増加関数であるから

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

ならば $R > D$ となり、これが求める条件である。実は、この議論からこの条件が必要条件でもあることがわかる。また、$k > v$ より $v_e^* > 0$ であるから、実際に上向きの打ち出しが必要であることに注意する。

検算

- $v_e = 0$ のとき、公式は $gR/u = 2v$、すなわち $R = 2uv/g$ を与える。これは爆発しない放物体の通常の到達距離であり、当然そうなるべきものである。問題が $D > 2uv/g$ を仮定しているのもこのためで、そうでなければ打ち出しは必要ない。
- $u = v = 10$、$g = 10$、$D = 30$ とすると、しきい値は $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$ であり、このとき $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$ となるので、ちょうど $R = 30 = D$ である。

- 二段階の飛行を数値的に逐次シミュレーションしたところ、到達距離の公式と約 10^{-9} の精度で一致し、10^5 個のランダムな場合について、$R > D$ となるのがちょうど $v_e > v_e^*$ のときであることが確認された。

よくある間違い

- 爆発前に進んだ水平距離 uv/g を忘れ、R を A からではなく爆発地点の真下から測ってしまう。
- 最高点から着地までの時間を再び v/g としてしまい、新たな上向きの速度 v_e を無視する。
- 右辺が非負であることを確かめずに $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$ を 2 乗する、あるいは、等号となる一つの値がなぜ不等式に置き換わるのかを説明しない。

STEP のその先へ

爆発は系全体の運動量（momentum）を保存するので、二つの破片の重心（centre of mass）は、P がそうでないにもかかわらず、もとの放物線に沿って運動を続ける。内力は重心の運動を変えられないというこの原理は、大学 1 年の力学の講義でロケットの運動や衝突を扱う際の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。