解答例

STEP II 2001、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP II 2001、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q10

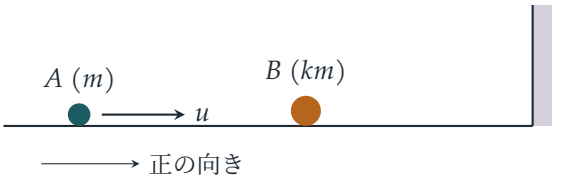
鍵となる考え方

これは 2 回の衝突と 1 回の「追いかけっこ」の問題である。最初の衝突は、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）という標準的な 2 式で処理できる。B が壁ではね返った後に問うべきことはただ一つ、戻ってくる B が A と出会えるかどうかである。それが起こるのは、壁へ向かう向きの A の速度が B の速度より大きいとき、かつそのときに限る。この条件が k に関する不等式になる。エネルギーの部分では、運動エネルギー（kinetic energy）を k の関数として表し、$mu^2/27$ と比較する。その比較は完全平方式（perfect square）に帰着することがわかる。

解答

2 回目の衝突

A と B をなめらかな面上の質点（particle）としてモデル化する。したがって水平方向の力積（impulse）は衝突によるものだけである。A から壁へ向かう向きを正とする。最初の衝突の直後の A, B の速度をそれぞれ v_A, v_B とする。



最初の衝突。 運動量が保存され、遠ざかる速さは近づく速さの e_1 倍である：

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

第 2 式の k 倍を第 1 式に加えると $(1+k)v_B = (1+e_1)u$ を得る。よって

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

$v_B > 0$ であるから、B は壁に向かって進み続ける。A は $1-ke_1$ の符号に応じて、前進している場合も、静止している場合も、後退している場合もありうる。

壁。 B は速さ v_B で壁に当たり、速さ $e_2 v_B$ ではね返るので、その速度は $-e_2 v_B$ となる。その間、A は一定の速度 v_A で動き続ける。なお、$v_A < v_B$（差は $e_1 u > 0$）であり、しかも A は B の後ろから出発するので、A が先に壁に到達することはない。

考えてみよう はね返った後、A と B は同じ向きに動いているかもしれない。両者が出会うかどうかはどのように判定すればよいだろうか？

はね返った後、B は A と壁の間にあり、どちらの質点にもほかに何も作用しない。したがって両者の間隔が縮まるのは、A の速度が B の速度より大きいとき、かつそのときに限る（if and only if）：

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

$v_A > 0$ ならば、両者は互いに近づく向きに動いている。$v_A \le 0$ ならば B が A を追いかける形になり、より速い場合に限り追いつく。この一つの不等式で両方の場合が扱える。代入し、正の量 $(1+k)/u$ を掛けると

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

を得る。ここで最後の段階では $e_1 > 0$ で割った。よって、この不等式が成り立てば 2 回目の衝突が起こり、題意は示された。（等号が成り立つ場合は、A と B は同じ速度で動き去り、決して出会わない。）

運動エネルギー

$e_1 = \frac{1}{3}, e_2 = \frac{1}{2}$ のとき、

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

B がはね返った直後、A の速さは依然として $|v_A|$ であり、B の速さは $e_2 v_B$ である。よって運動エネルギーの総和は

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\Big[(3-k)^2 + 4k\Big] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

次に、共通の分母 $54(1+k)^2$ を用いて $mu^2/27$ と比較する：

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\Big[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\Big] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}(k^2-10k+25) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

考えてみよう 平方は決して負にならないのに、条件 $k<5$ は何のためにあるのだろうか？

右辺は決して負にならず、0 になるのは $k=5$ のときに限る。よって $k<5$ のとき $(k-5)^2>0$ であり、したがって

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

となり、題意は示された。値 5 は偶然ではない。これらの係数では、前半で求めた上限は $(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3})/\tfrac{1}{3}=5$ である。つまり $k<5$ はまさに 2 回目の衝突が起こる条件である。$k=5$ のとき、はね返った後の両質点はともに速度 $-u/9$ で動き、エネルギーはちょうど $mu^2/27$ となる。

検算

- $e_1=1, k=1$ とする（質量が等しく、完全弾性衝突（perfectly elastic）の場合）。すると $v_A=0, v_B=u$ となり、おなじみの速度の交換が起こる。上限は $k<1+2e_2$ となり、$e_2>0$ であれば $k=1$ はこれを満たす。つまり、戻ってくる B は静止している A に必ず衝突する。
- $k=5$ のとき、式から $v_A=-\frac{u}{9}$ および $-e_2 v_B = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{9} = -\frac{u}{9}$ が得られ、主張どおり速度は等しい。
- 数値的に、k を 0.001 から 4.999 まで動かして厳密な分数で計算すると、比 $T/(mu^2/27)$ の最小値は $k=5$ 付近で 1.00000001 であり、常に 1 より大きい。20 000 組の三つ組 (k, e_1, e_2) によるランダムなテストでも、この不等式とはね返り後の速度の直接比較とで結果が食い違う例は見つからなかった。

よくある間違い

- $v_A > 0$ を要求してしまう。A が後退していても B に追いつかれることはありうる。正しい条件は、はね返り後の二つの速度を比較するものである。
- 壁が B の向きを逆にすることを忘れる。その速度は $e_2 v_B$ ではなく $-e_2 v_B$ になる。
- エネルギーの計算で、壁に当たる前の B の速さを使ってしまう。問題が求めているのははね返った直後のエネルギーなので、B の速さは $e_2 v_B$ である。

STEP のその先へ

ニュートンの反発の法則は、衝突の際に生じる短く激しい変形の間に起こることを表すモデルである。反発係数（coefficient of restitution）は、相対運動の運動エネルギーがどれだけ失われるかを要約したものである。大学 1 年次の力学の講義では、衝突はしばしば重心系（centre-of-mass frame）で解析される。この座標系では、衝突は単に相対速度の向きを逆にして e 倍するだけであり、失われるエネルギーは $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$ である。ここで μ は換算質量（reduced mass）、w は近づく速さである。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。