解答例

# STEP II 2001、第 1 問

純粋数学 ・ 二項近似

> **STEP II 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

## 鍵となる考え方

$(1-x)^{1/2}$ の二項級数（binomial series）は $x$ が小さいとき速く収束（converge）するので、最初の数項だけで非常によい有理数による近似（rational approximation）が得られる。工夫すべきは $x$ の選び方である。$1-x$ が「平方数と、平方根を求めたい数との積を、10 の累乗で割ったもの」になるようにしたい。そうすれば $1-x$ の平方根は、求めたい平方根の簡単な定数倍になる。$99 = 9 \times 11$ および $9999 = 9 \times 1111$ であるから、選ぶべき値はほとんど自然に決まる。

## 解答

### 2 次の近似

$|x| < 1$ で成り立つ二項展開（binomial expansion）により、

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

したがって $x$ が小さいとき、

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

誤差（error）を求めるのに必要な、最初に無視した項 $-\frac{1}{16}x^3$ もあわせて求まった。実は第 2 項以降はすべて負である（$n \geq 1$ のとき積 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$ には負の因数が $n-1$ 個あり、$(-x)^n$ が $(-1)^n$ を与えるので、全体として負の符号が一つ残る）。よって $0 < x < 1$ のとき、この 2 次式は過大評価（overestimate）となる。

### 小問 (i)

$x = \frac{1}{100}$ とすると、

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

2 次の近似を用いると、

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000 - 400 - 1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

> **考えてみよう** 最初に無視した項は $-\frac{1}{16}x^3$ である。これが $\sqrt{11}$ の誤差だろうか？

そうではない。これは $\sqrt{1-x}$ に対する近似の誤差であり、そのあと $\frac{10}{3}$ を掛けている。したがって $\sqrt{11}$ の誤差はおよそ

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

よって有効数字（significant figure）1 桁で誤差は $2\times 10^{-7}$ であり、$\frac{79\,599}{24\,000}$ は $\sqrt{11}$ よりわずかに大きい。

### 小問 (ii)

小問 (i) と同じ工夫を用いる。$1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$ であるから、$x = \frac{1}{10\,000}$ とすると、

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

すると

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1 - \frac{1}{20\,000} - \frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000 - 40\,000 - 1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では因数 3 で約分した（799 959 999 の各位の数字の和（digit sum）は 75 であり、3 で割り切れる）。

誤差は、最初に無視した項のおよそ $\frac{100}{3}$ 倍である：

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

これは問題の要求どおり、およそ $2\times10^{-12}$ である。よって適切な有理数は

$$\sqrt{1111}\approx\frac{266\,653\,333}{8\,000\,000}\left(=\frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

## 検算

- $79\,599/24\,000=3.316625$ であり、一方 $\sqrt{11}=3.31662479\ldots$ である。差は $2.096\times10^{-7}$ で、見積もり $2.08\times10^{-7}$ と合致し、近似値が大きすぎることも確かめられる。
- $266\,653\,333/8\,000\,000=33.331666625$ であり、一方 $\sqrt{1111}=33.33166662291\ldots$ である。差を高い精度で正確に計算すると $2.0835\times10^{-12}$ となった。
- 小問 (ii) で見積もりの精度が上がるのは、次に無視した項 $-\frac{5}{128}x^4$ が、$x$ が小さいほど $x^3$ の項に比べて相対的に小さくなるからである。

## よくある間違い

- 無視した項に $\frac{10}{3}$（または $\frac{100}{3}$）を掛け忘れ、誤差を 10 倍または 100 倍小さく求めてしまう。
- $x^2$ の係数の符号を誤る。$(-x)^2$ があるので、この項は $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2=-\frac{1}{8}x^2$ であり、$+\frac{1}{8}x^2$ ではない。
- $1-x$ が「1111 を 10 の累乗で割ったもの」になるような $x$ を試してしまう。そのような値は小さくないので、級数の収束が遅すぎて役に立たない。

## STEP のその先へ

誤差が「最初に無視した項とほぼ等しい」という主張は、テイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）とラグランジュ（Lagrange）の剰余項（Lagrange form of the remainder）を用いて厳密にできる。これは $(0,x)$ 内の未知の点を含む形で、誤差を正確に表す式を与える。そこから、単なる見積もりではなく、確かな上界と下界が得られる。このような誤差評価を厳密にすることは、解析学（analysis）の最初の講義の標準的な内容である。Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。