解答例

STEP I 2001、第 9 問

力学 ・ 迎撃と相対速度

> **STEP I 2001、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q9

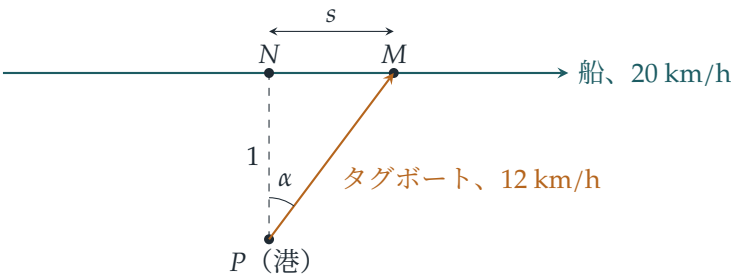
鍵となる考え方

出発をできるだけ遅らせるには、タグボートは全速力で一直線に進まなければならない。したがって実質的に選べるのは、船の航路上のどこで落ち合うかだけである。落ち合う地点の候補それぞれについて、タグボートが間に合うための最も遅い出発時刻を求める。次に、その出発時刻を落ち合う地点について最大化する。設定さえ正しくできれば、これは一変数の最適化（optimisation）問題である。

解答

設定

船とタグボートを質点（particle）とみなす。港 P を原点に置き、船は直線 $y = 1$ 上を x 軸の正の向きに進むとする（距離の単位は km、時間の単位は時間）。P から航路に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）は $N = (0, 1)$ であり、これは船が港に最も近づく点である。



点 $M=(s,1)$ で落ち合うとする。航路上の船の位置は時刻の一次関数（linear function）であるから、船が M に到達する時刻は

$$t_M=\frac{s-c}{20},$$

である。ここで c は船の出発位置によって決まる定数である。（船はまだ近づいている途中なので、c は今後必要となるどの落ち合う位置よりも小さい。）

考えてみよう なぜタグボートは全速力で一直線に進まなければならないのか。

タグボートが時刻 T に出発して時刻 t_M に M にいるとすると、少なくとも直線距離 $PM=\sqrt{s^2+1}$ を時速 12 km 以下で進んだことになるので、$t_M-T\geq\sqrt{s^2+1}/12$ である。等号は、M に向かって最高速度でまっすぐ進むときに成り立つ。それより遅かったり、遠回りしたりすれば、より早く出発しなければならなくなる。

よって、M で落ち合うことができる最も遅い出発時刻は

$$T(s)=\frac{s-c}{20}-\frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

であり、すべての s にわたる $T(s)$ の最大値を求めればよい。

出発時刻の最大化

微分すると

$$T'(s)=\frac{1}{20}-\frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

$T'(s)=0$ とおくと

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

これには $s>0$ が必要である。両辺を 2 乗すると $25s^2=9(s^2+1)$ となるので、$s^2=\frac{9}{16}$、すなわち $s=\frac{3}{4}$ である。

これは極大値であり、しかも最大値（大域的最大値、global maximum）である。実際、$\sqrt{s^2+1}$ は凸（convex）であるから、T（一次関数から凸関数を引いたもの）は凹（concave）である。同じことだが、$\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ は s について増加するので、$s<\frac{3}{4}$ では $T'(s)>0$、$s>\frac{3}{4}$ では $T'(s)<0$ となる。定数 c が消えていることに注意しよう。落ち合う地点は船の出発位置によらないのである。

したがってタグボートは N の $\frac{3}{4}$ km 先で船と落ち合い、その移動距離は

$$PM=\sqrt{\tfrac{9}{16}+1}=\sqrt{\tfrac{25}{16}}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{PM=\tfrac{5}{4}\text{ km}=1.25\text{ km}.}$$

である。タグボートが海上にいる時間は $\frac{5/4}{12}=\frac{5}{48}$ 時間、すなわち $6\frac{1}{4}$ 分である。

幾何学的な解釈

タグボートの進行方向は PN と角 α をなし、$\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$ である。つまり $\sin\alpha$ は速さの比 12/20 に等しい。タグボートの速度は $(7.2, 9.6)$ であり、船に対する相対速度（relative velocity）は $(7.2-20, 9.6) = (-12.8, 9.6)$ である。両者の内積（dot product）は $-92.16 + 92.16 = 0$ である。臨界の出発時刻では、タグボートの速度は船に対する相対速度と垂直になる。これは、より遅い追跡者がぎりぎりで迎撃に成功するための標準的な条件である。

検算

- 落ち合う地点の細かい格子上で総当たり探索（brute-force search）を行うと、船の出発位置をいくつ変えても、$T(s)$ の最大値は常に $s = 0.75$ でとられ、タグボートの移動距離は 1.25 km となる。
- 最も遅い出発時刻から進行方向 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ で運動を数値的に追跡すると、タグボートは船に到達する。わずか 0.002 時間遅れて出発すると、どの進行方向をとっても船の 20 m 以内には近づけない。
- 妥当性の確認：もしタグボートが船と同じ速さなら、$\sin\alpha$ は 1 となり、落ち合う地点は無限の彼方へ遠ざかる。同じ速さのタグボートはいつまでも船を追いかけ続けられるのだから、これは理にかなっている。

よくある間違い

- 船が港に最も近づく点 N で落ち合うとしてしまう（タグボートの移動距離 1 km）。これはタグボートの**移動距離**を最小にするが、出発時刻を最大にするわけではない。少し先まで進めば、船がそこまで航行する必要があるぶん、タグボートは時間を稼げるのである。
- $s/20$ の項を入れずに、タグボートの所要時間 $\sqrt{s^2+1}/12$ を最小化してしまう。最大化すべき量は出発時刻であり、それには両方の船が関わっている。

STEP のその先へ

到着時刻の差を最大化することは、最適制御（optimal control）問題や追跡問題（pursuit problem）の小さな例である。速さの比の条件 $\sin\alpha = 12/20$ は、超音速機の後方にできるマッハ円錐（Mach cone）と同じ幾何である。円錐の半頂角の正弦は音速と機体の速さの比であり、ここでの遅いタグボートは、速い音源を追いかける音の役割を演

じている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は相対速度と座標系を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、力学における STEP 形式の最適化問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。