解答例

STEP I 2001、第 8 問

純粋数学 • 2 階線形方程式

> **STEP I 2001、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q8

鍵となる考え方

既知の解をそれぞれ方程式に代入すると、各 x の値において、二つの未知関数 $p(x)$ と $q(x)$ を結ぶ方程式が一つ得られる。解が二つあれば二元の連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られるので、二つの数を求めるときとまったく同じように p と q について解けばよい。最後の小問では、中間の小問で示した線形性（linearity）により、与えられた二つの解をそれらのより簡単な一次結合に置き換えることができ、さらに三角関数の恒等式（trigonometric identities）を使うとその一次結合は非常に簡単になる。

解答

p と q を求める

$y = x$ のとき $y' = 1$、$y'' = 0$ であるから、$(*)$ に代入すると

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

を得る。$y = 1 - x^2$ のとき $y' = -2x$、$y'' = -2$ であるから

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

となる。(1) より $p(x) = -x\,q(x)$ である。これを (2) に代入すると

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

$1 + x^2 > 0$ であるから両辺をこれで割ってよく、$q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$ を得る。すると (1) より $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$ となり、示すべき結果が得られた。（x で割

る操作は一度も行っていないので、この結果は $x = 0$ を含むすべての実数 x で成り立つ。)

任意の一次結合 $ax + b(1 - x^2)$ は解である

$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$ とおく。微分は線形であるから、a, b を定数として $y = ay_1 + by_2$ とすると

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + b(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

となる。$y_1 = x$、$y_2 = 1 - x^2$ とすると、$L[y_1]$ と $L[y_2]$ はどちらも 0 である(これがそれらが $(*)$ を満たすということの意味である)。よって、任意の定数 a と b に対して $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$ が成り立つ。直接確かめたいのであれば、$y = ax + b(1 - x^2)$ について $y' = a - 2bx$、$y'' = -2b$ であり、

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2(ax + b - bx^2)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

となる。

最後の小問

いま述べた議論では、特定の p と q の性質は何も使っていない。つまり、$(*)$ の形の**どのような**方程式についても、二つの解の一次結合 $ay_1 + by_2$ はやはり解になる。したがって、$\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ と $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$ がともに $(*)$ を満たすならば、それらの和と差

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

も $(*)$ を満たす。ここでは $\theta = \frac{1}{2}x^2$ として $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ と $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ を用いた。

> ? **考えてみよう** 与えられた関数の代わりに 1 と $\cos(x^2)$ を扱ってよいのはなぜだろうか。

この置き換えは逆にたどることができるからである。与えられた関数は $\frac{1}{2}(1 + \cos x^2)$ と $\frac{1}{2}(1 - \cos x^2)$ であるから、p と q がこの二つをともに解とするのは、1 と $\cos(x^2)$ をともに解とするときであり、かつそのときに限る。失われる情報は何もなく、しかも導関数の計算はずっと簡単になる。

解 $y = 1$。このとき $y' = y'' = 0$ であるから、$(*)$ は $q(x) \cdot 1 = 0$ となり、

$$q(x) = 0.$$

を得る。

解 $y = \cos(x^2)$。合成関数の微分法（chain rule）により $y' = -2x\sin(x^2)$ であり、積の微分法（product rule）により

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

である。$q = 0$ のもとで、$(*)$ は

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

となる。$x\sin(x^2) \neq 0$ となる点では割り算ができて、

$$p(x) = -\frac{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)} = -\frac{1}{x} - 2x\cot(x^2).$$

を得る。よって $p(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x\cot(x^2)$、$q(x) = 0$ である。

$x\sin(x^2) = 0$ となる点（すなわち $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{n\pi}$）では p の係数が 0 になるので、方程式はそこでの p について何も教えてくれない。実際、求めた p はこれらの点で発散する。これは計算間違いではない。このような点では与えられた二つの関数の導関数がともに 0 になるので、それらが $(*)$ の形の性質のよい方程式の二つの「独立な」解であることはありえず、p はそこで特異（singular）にならざるをえないのである。

検算

- 最初の小問の独立な検算として、二つの解の**ロンスキアン**（Wronskian）$W = y_1y_2' - y_2y_1'$ は $W' = -pW$ を満たす。$y_1 = x$、$y_2 = 1 - x^2$ とすると $W = -2x^2 - (1 - x^2) = -(1 + x^2)$ となるので、$-p = W'/W = 2x/(1 + x^2)$ であり、求めた p と一致する。最後の小問では、解 1 と $\cos(x^2)$ から $W = -2x\sin(x^2)$ が得られ、やはり $W'/W = 1/x + 2x\cot(x^2) = -p$ となる。
- 数値的には、$x = 0.9$ において、与えられた二つの関数を、導関数を有限差分（finite differences）で計算したうえで $(*)$ に代入すると、$p(0.9) \approx -2.82465$、$q(0.9) \approx 0$ でなければならないことがわかり、$-1/0.9 - 1.8\cot(0.81) \approx -2.82465$ と一致する。

よくある間違い

- $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ をそのまま 2 回微分して、式変形の途中で迷子になる。まず 2 倍角の公式（double-angle identities）を使い、それから微分すること。

- (1) を x で割って $q = -p/x$ とする。これでもうまくいくが、その場合は $x = 0$ を別に扱わなければならない。代わりに p を消去すればこの問題は避けられる。
- 最後の小問で、p の式がどこで有効であるかを述べ忘れる。

STEP のその先へ

この問題は 2 階線形微分方程式（second-order linear differential equations）の理論を垣間見せてくれる。解全体は 2 次元のベクトル空間（vector space）をなし、任意の二つの独立な（independent）解によって方程式が決まり、ロンスキアンは（アーベル（Abel）の公式 $W' = -pW$ とともに）独立性を測る尺度となる。ここでの $x = \pm\sqrt{n\pi}$ のようにロンスキアンが 0 になる点は、まさに係数が特異にならざるをえない点である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、これらすべてが丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。