解答例

STEP I 2001、第 7 問

純粋数学 • 凹性と微分方程式

STEP I 2001、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s1-q7

鍵となる考え方

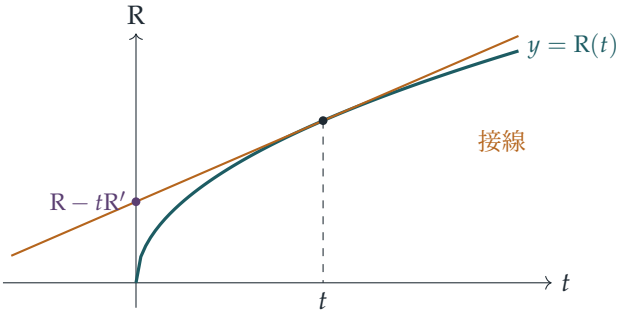
3 つの条件は、R が原点から出発し、増加し、下向きに曲がることを述べている。つまり、そのグラフは凹（concave）である。凹なグラフはその各点における接線（tangent）の下側にあり、このただ一つの幾何学的事実から (i) の不等式が得られる。$H = R'/R$ は $\ln R$ の導関数（derivative）であるから、(ii) と (iii) は変数分離形の微分方程式（separable differential equation）になる。R を具体的に求めたら、それを条件に照らして調べる。(i) の不等式を使えば、モデルを手早く棄却できる。

解答

まず、全体を通して用いる事実を確認しておく。$R(0) = 0$ であり、$t > 0$ で R は狭義単調増加であるから、$t > 0$ に対して $R(t) > 0$ である。したがって、$t > 0$ に対して $H(t)$ は定義され、$H(t) > 0$ である。

小問 (i)

グラフは原点を通り、傾きは正で、t が増加するにつれて傾きは減少する。



$t > 0$ を固定する。時刻 t におけるグラフの接線の傾きは $\mathrm{R}'(t)$ であるから、この接線は縦軸と高さ

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

で交わる。図によれば、この切片は正である。原点を通る曲線が接線の下側にあるからである。これを厳密にするため、$[0, t]$ 上の R に平均値の定理（mean value theorem）を適用する。すると、$0 < c < t$ を満たすある c が存在して

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

となる。$\mathrm{R}'' < 0$ であるから関数 R' は狭義単調減少であり、$c < t$ より $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$ である。ゆえに

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

であり、これはまさに接線の切片が原点より上にあるという主張である。$\mathrm{R}'(t) > 0$ で割ると

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

となり、示すべき不等式が得られた。

（同値な言い方をすれば、接線は t 軸と $t - 1/\mathrm{H}(t)$ で交わり、これは負である。宇宙論（cosmology）では $1/\mathrm{H}$ は「ハッブル時間」（Hubble time）と呼ばれ、この結果は、減速するどのモデルにおいても宇宙の年齢はハッブル時間より小さいことを意味している。）

小問 (ii)

$t > 0$ では $\mathrm{R} > 0$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

と書ける。積分すると $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$ となるので

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

である。ただし $k = \mathrm{e}^C > 0$ である。

次に、$k > 0$ と $t^a > 0$ を用いて条件を調べる。

- $\mathrm{R}'(t) = kat^{a-1}$ であり、これが $t > 0$ で正となるのは $a > 0$ のとき、かつそのときに限る。
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)t^{a-2}$ である。$a > 0$ のもとで、これが負となるのは $a < 1$ のとき、かつそのときに限る。
- $a > 0$ ならば $t \to 0^+$ のとき $kt^a \to 0$ であるから、$\mathrm{R}(0) = 0$ と矛盾しない。($a \leq 0$ の場合はいずれにせよ成り立たない。kt^a は $k \neq 0$ に収束するか、発散するからである。)

したがって、条件 $(*)$ が成り立つのはちょうど

$$0 < a < 1.$$

のときである。これは小問 (i) と整合する。実際、そこでの $t < 1/\mathrm{H} = t/a$ から $a < 1$ が従う。

小問 (iii)

今度は $\mathrm{H}(t) = b/t^2$ である。まず、(冒頭の注意より) $t > 0$ に対して $\mathrm{H}(t) > 0$ であるから、$b > 0$ でなければならない。$b \leq 0$ ならば、それで話は終わりである。

そこで $b > 0$ と仮定する。小問 (i) より、すべての $t > 0$ が

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{すなわち} \qquad t > b$$

を満たさなければならない ($t > 0$ で割り、$b > 0$ を掛けた)。しかしこれは $0 < t \leq b$ を満たすすべての t で成り立たない。よって、$(*)$ と矛盾しない b の値は存在しない。

考えてみよう このように小問 (i) を使ってよいのだろうか。

よい。小問 (i) では、$(*)$ を満たす**任意の**関数について、すべての $t > 0$ で $t < 1/\mathrm{H}(t)$ が成り立つことを証明した。したがって、提案された H がたった一つの t でもこの不等式を破るなら、その H をもつどの関数も $(*)$ を満たし得ない。これは背理法 (proof by contradiction) による証明である。

直接確かめるには、(ii) と同様に方程式を解けばよい。$\ln \mathrm{R} = -b/t + C$ であるから、

$k > 0$ として $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$ となる。すると

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$
$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}\,(b - 2t).$$

である。$b > 0$ のとき、$\mathrm{R}' > 0$ であり、$t \to 0^+$ のとき $\mathrm{R}(t) \to 0$ であるから、最初の 2 つの条件は成り立つ。しかし $0 < t < b/2$ では $\mathrm{R}''(t) > 0$ であるから、原点の近くでグラフは逆向きに曲がっており、$(*)$ は成り立たない。

検算

- (ii) で $a = \frac{1}{2}$ とすると $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$ となり、図の形になる。増加かつ凹であり、$t < 1/\mathrm{H} = 2t$ である。$a = 1$ とすると原点を通る直線となり、ちょうど $t = 1/\mathrm{H}$ が成り立つ。これは (i) の境界の場合である。
- (iii) で $b = 1$、$k = 1$ とすると、数値的に $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$ であり、また $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$ である。いずれも $(*)$ を破っている。

コンピュータにより、いくつかの凹な試験関数で (i) を、有限差分（finite differences）によって (ii) と (iii) の解と導関数の式を、さらに $t = b/2$ における R'' の符号の変化を確認した。

よくある間違い

- (i) で、図だけを根拠に論じること。「曲線は接線の下側にある」には理由が必要である。すなわち、平均値の定理と、R' が減少することである。
- (ii) で、$\mathrm{R}' > 0$ のために（そして $\mathrm{R}(0) = 0$ のために）$a > 0$ が必要であることを忘れ、$a < 1$ だけを答えること。
- (iii) で、凹性が大きな t で破れると主張すること。$b - 2t$ の符号を見れば、破れるのは小さな t においてであることがわかる。

STEP のその先へ

小問 (i) は、凸関数（convex function）と凹関数に関する中心的な事実の特別な場合である。すなわち、微分可能な関数が凹であることは、そのグラフがすべての接線の下側にあることと同値である。これはイェンセン（Jensen）の不等式や、最適化（optimisation）の理論の多くの土台となっている。平均値の定理を用いた議論は、大学

1 年次の解析学（analysis）の標準的な内容である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。実際の宇宙論では、$a = \frac{2}{3}$ は物質優勢（matter-dominated）のアインシュタイン–ド・ジッター宇宙（Einstein–de Sitter universe）に対応し、その宇宙の年齢はハッブル時間の 3 分の 2 である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。