解答例

STEP I 2001、第 6 問

純粋数学 • 回転面

> **STEP I 2001、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.8 節「**球形のパンを切る**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/spherical-loaf.html

鍵となる考え方

半円（semicircle）$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ を x 軸のまわりに回転させて球（sphere）をつくる。表面積（surface area）の公式における被積分関数（integrand）$y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ は実は**定数**になるので、どのスライスのクラスト（皮）もその厚さだけで決まり、スライスの位置にはよらない。後半では、ヒントの積分範囲 $-a$ から $-a + t$ が示唆するように一方の端からスライスを食べていくので、残る部分は球冠（spherical cap）となる。比 V/A は球冠の厚さの二次式（quadratic）となり、その最大値を求めればよい。

解答

クラストはスライスの枚数に比例する

パンの半径を a、中心を原点とする。このときパンの表面は

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

を x 軸のまわりに回転させて得られる。微分すると、$|x| < a$ において $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$ であるから、$x^2 + y^2 = a^2$ と $y > 0$ を用いて

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

となる。したがって、平面 $x = x_1$ と $x = x_2$（ただし $-a \le x_1 < x_2 \le a$）の間にある球の曲面部分の面積は

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a \, (x_2 - x_1).$$

である。（被積分関数が定義されないのは端点 $x = \pm a$ のみであり、そこでも有界であるから、この積分に問題はない。）

さて、パンを N 枚のスライスに切り、各スライスの厚さを $h = 2a/N$ とする。どのスライスも、どこにあっても、ちょうど面積 $2\pi ah$ のクラストをもつ。よって n 枚のスライスが残っていれば、その位置がどうであっても、残っているクラストは

$$A = n \cdot 2\pi ah,$$

であり、これは残っているスライスの枚数 n に比例する。これが示すべきことであった。（これはアルキメデス（Archimedes）による古い結果である。すなわち、球とその外接円柱（circumscribing cylinder）は、任意の 2 つの平行な平面の間で等しい面積をもつ。）

クラスティであるための条件

スライスは一方の端から食べていくので、何枚か食べた後に残るパンは、$0 < t \le 2a$ を満たすある t について $x = -a$ から $x = -a + t$ までの球冠である。前半の結果から $A = 2\pi at$ である。体積については $u = x + a$ と置換すると $y^2 = a^2 - x^2 = (a - x)(a + x) = (2a - u)u$ となるので、

$$V = \pi \int_{-a}^{-a+t} (a^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^t (2au - u^2) \, \mathrm{d}u = \pi \Big(at^2 - \frac{t^3}{3} \Big).$$

である。したがって

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi t^2 \big(a - \frac{t}{3}\big)}{2\pi at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a} =: f(t).$$

考えてみよう この比はどれだけ食べたかによって変わる。気にしなければならないのはどの t の値だろうか？

条件は**何枚**食べた後でも成り立たなければならないので、f の最大値が必要である。平方完成（completing the square）すると

$$f(t) = \frac{3a}{8} - \frac{1}{6a} \Big(t - \frac{3a}{2} \Big)^2,$$

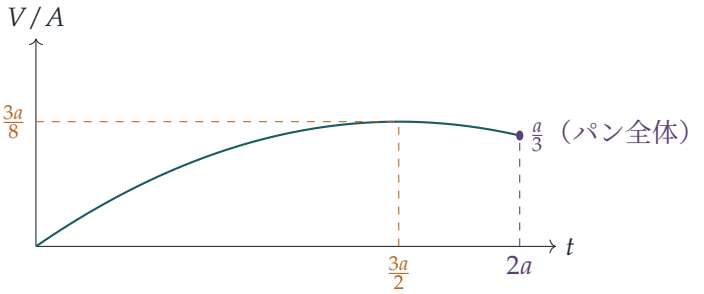
となるので、f は $t = \frac{3a}{2}$（これは $(0, 2a]$ に含まれる）で最大となり、最大値は $\frac{3a}{8}$ である。

$t = \frac{3}{2}a$ は実際に実現されるだろうか？たとえばパンを 4 枚に切って 1 枚食べれば（あるいは $4m$ 枚に切って m 枚食べれば）実現される。平行に切ったパンとしてクラステ

ィと呼ばれるためには、そのような切り方についても規定を満たさなければならないので、

$$\frac{3a}{8} < 1, \qquad \text{すなわち、} \qquad a < \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ メートル,}$$

が必要であり、これが示すべきことであった。逆に $a < \frac{8}{3}$ ならば、すべての t に対して $f(t) \le \frac{3a}{8} < 1$ となるので、どのように切ってもそのパンはクラスティである。



図は $a = 2$ のときの $f(t)$ を示している。比はパンの中央に向かうにつれて増加し、その後減少する。向こう側の端の近くでは、クラストは多く加わるがパンの中身はわずかしか加わらないからである。

検算

- パン全体について、$t = 2a$ とすると $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$ となり、$\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$ と一致する。
- $a = \frac{8}{3}$ とし、4 枚に切る。残りが 1,2,3,4 枚のとき比は $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$ であるから、1 枚食べた後の比はちょうど 1 となり、狭義の不等式をぎりぎり満たさない。
- 数値的には、無作為に選んだスライスについて面積の公式を数値積分（quadrature）すると $2\pi a(x_2 - x_1)$ が再現された。また $a = 2.66$ のとき、200 枚までのどの切り方でも比は 1 未満に保たれた。

よくある間違い

- パン全体だけを考えること。$a/3 < 1$ からは $a < 3$ が得られるが、これは必要条件ではあるもののはるかに弱い。最も厳しいのは、パンの幅の 4 分の 1 を食べたときである。
- 平らな切り口をクラストに含めること。クラストはもとの曲面部分だけであり、与えられた公式が測っているのもそれである。

STEP のその先へ

被積分関数が定数になることは、アルキメデスの帽子箱定理（hat-box theorem）にほかならない。すなわち、球をその外接円柱へ横向きに射影すると面積が保たれる。球面上で一様に選んだ点の高さが一様分布に従うのはこのためであり、この事実は確率論や物理学で絶えず用いられる。このような面積分（surface integral）や、写像が面積を保つのはどのような場合かといった話題は、ベクトル解析（vector calculus）の最初の講義で扱われる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、球面の関連する写像についての美しい幾何学的な議論がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。