解答例

STEP I 2001、第 5 問

純粋数学 ・ 積分記号下の微分

> **STEP I 2001、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q5

鍵となる考え方

(i) と (ii) の積分はどちらも直接計算できる。(ii) は置換（substitution）$u = 1 + tx$ を行えばよい。本当に大切なのは最後の注意である。(ii) の被積分関数（integrand）は (i) の被積分関数をパラメータ（parameter）t で微分したものであり、答えどうしも同じ関係にある。つまり、積分の内側でパラメータ t について微分する操作は、x について積分する操作と交換できるように見える。これをもう一度行い、$t = 1$ とおけば予想（conjecture）が得られる。

解答

以下では常に $t > 0$ かつ $0 \le x \le 1$ であるから、$1 + tx \ge 1 > 0$ となり、どの被積分関数も発散しない。

小問 (i)

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+tx)^{-1} = -t(1+tx)^{-2}$ であるから、$(1+tx)^{-2}$ の原始関数（antiderivative）の一つは $-\dfrac{1}{t(1+tx)}$ である（ここで $t \neq 0$ を用いた）。よって

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

分子に x があるため直接計算するのは面倒なので、$u = 1 + tx$ とおく。すると $x = \dfrac{u-1}{t}$、$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$ であり、積分区間 $x = 0, 1$ は $u = 1, 1+t$ に変わる：

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t} \frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t} \left(u^{-2} - u^{-3}\right)\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right).$$

考えてみよう すべてを通分して展開せずに、かっこの中を整理するにはどうすればよいか？

$w = \dfrac{1}{1+t}$ とおくと、かっこの中は $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$ となり、完全平方式である。さらに $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

となり、これが求める結果である。

予想

x を固定し、被積分関数を t の関数とみなす：

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

したがって、(ii) の答えが (i) の答えの導関数であるのとちょうど同じように、(ii) の被積分関数は (i) の被積分関数を t で微分したものである。このことから次の法則が示唆される。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

これをもう一度適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

となるので、$t > 0$ に対して

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

が成り立つと予想される。$t = 1$ とおくと、予想される値は

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

である。

検算

- $t \to 0$ のとき、(i) の被積分関数は 1 に近づき、答え $\frac{1}{1+t}$ も 1 に近づく。(ii) では被積分関数は $-2x$ に近づき、その積分は -1 であって、$-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$ と一致する。
- 予想を確かめることは求められていないが、すぐにできる。$u = 1 + x$ とおくと、積分は $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$ となる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると最後の積分の値は 0.250000 となり、25 個の異なる t の値について $\frac{2}{(1+t)^3}$ と小数第 9 位まで一致する。

よくある間違い

- (ii) で $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$ から生じる因子 $\frac{1}{t}$ を忘れること。$\frac{1}{t}$ の因子は**二つ**あり、一つは x から、もう一つは $\mathrm{d}x$ から生じる。
- 置換したあと、積分区間を $u = 1$ と $u = 1 + t$ に変更し忘れること。
- $-(1+t)^{-2}$ を微分して $-2(1+t)^{-3}$ としてしまうこと。二つの負号は打ち消し合うので、予想される値は正である（被積分関数が正なので、当然そうでなければならない）。

STEP のその先へ

ここで予想した法則は**積分記号下の微分**（differentiation under the integral sign）であり、ライプニッツ（Leibniz）の法則とも呼ばれる。f と $\partial f/\partial t$ が閉長方形上で連続ならばこの法則が成り立つというのは実解析の定理であり、ここでは $0 \le x \le 1$ かつ $a > 0$ である任意の区間 $[a, b]$ 内の t に対してその条件が満たされている。この議論を繰り返すと、すべての n に対して $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$ が得られる。ファインマン（Richard Feynman）がこの技法を用いて、他の方法では手に負えなかった積分を計算したことはよく知られている。極限・微分・積分の順序交換の背後にある理論については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。