解答例

# STEP I 2001、第 4 問

純粋数学 ・ 逆三角関数を含む方程式

> **STEP I 2001、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q4

## 鍵となる考え方

3 倍角の公式（triple-angle formula）は tan の加法定理（addition formula）からただちに得られる。その後はすべてがひとつの事実にかかっている。すなわち、tan は周期（period）$\pi$ で繰り返すので、$\tan 3\varphi = \tan 3\theta$ ならば、$\varphi$ は $\theta$ と $\pi/3$ の任意の整数倍だけ異なりうる、ということである。(i) と (ii) における本当の作業は、$\cos^{-1}$ と $\tan^{-1}$ の値域（range）をきちんと把握することであり、それによって無数にある角のうちどれが許されるかが決まる。

## 解答

### 3 倍角の公式

$t = \tan\theta$ とおく。加法定理より $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ であり、さらに

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + t}{1 - t\tan 2\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}$$

$$= \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

となる。ここで分母と分子に $1-t^2$ を掛けた。これが求める公式である。（この式は両辺がともに定義されるときには常に成り立つ。）

### $\tan 3\theta$ の値

$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$ かつ $0 < \theta < \pi/2$ であるから $\sin\theta > 0$ であり、

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \tfrac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

（3 辺が $1, 2, \sqrt{5}$ の直角三角形を思い浮かべるとよい。）$t = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{11/8}{1/4} = \frac{11}{2},$$

となり、題意が示された。

後で重要になるのは、$\theta$ がかなり小さいということである。実際、$\tan\theta = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ であるから $0 < \theta < \pi/6$ であり、したがって $0 < 3\theta < \pi/2$ である。

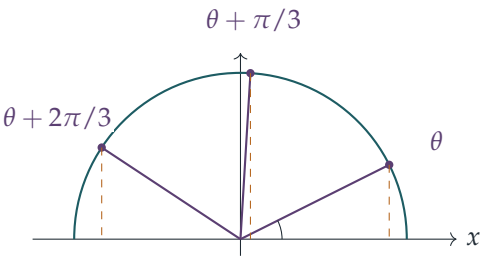
### 小問 (i)

$\varphi = \cos^{-1} x$ とおくと、$0 \le \varphi \le \pi$ かつ $x = \cos\varphi$ である。方程式は $\tan 3\varphi = \frac{11}{2} = \tan 3\theta$ ということを述べている。tan は周期 $\pi$ をもち、長さ $\pi$ の各区間で各値をちょうど 1 回ずつとるから、

$$3\varphi = 3\theta + k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \theta + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

**考えてみよう** これらの角のうち、実際に許されるものはいくつあるか？

$0 \le \varphi \le \pi$ でなければならない。$0 < \theta < \pi/6$ であるから、$k = 0, 1, 2$ に対しては $\varphi = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{3},\ \theta + \frac{2\pi}{3}$ となり、いずれも $(0, \pi)$ の内部にある。一方、$k = 3$ のときは $\varphi > \pi$、$k = -1$ のときは $\varphi < 0$ となる。よって解はちょうど 3 つである。




3 つの $x$ の値は、これらの角の余弦（破線の足）である。$\cos\theta = 2/\sqrt{5}, \sin\theta = 1/\sqrt{5}$

と加法定理を用いると、

$$x_1 = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$x_2 = \cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$
$$x_3 = \cos\theta\cos\tfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

これらの角のどれについても $3\varphi$ は $\pi/2$ の奇数倍にはならない（各 $3\varphi$ は $3\theta + k\pi$ の形であり、$0 < 3\theta < \pi/2$ である）ので、どの場合も $\tan 3\varphi$ は定義される。(i) の解は

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \qquad x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

である。（分母を有理化すると、それぞれ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$、$\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$、$-\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$ となる。）

**別解。** 3 倍角の公式に $T = \tan\varphi$ を代入すると $2(3T - T^3) = 11(1 - 3T^2)$、すなわち

$$2T^3 - 33T^2 - 6T + 11 = 0.$$

を得る。$T = \frac{1}{2}$ が解であることはわかっているので、因数分解すると $(2T-1)(T^2 - 16T - 11) = 0$ となり、$T = \frac{1}{2}$ または $T = 8 \pm 5\sqrt{3}$ である。このとき $x = \cos\varphi = \pm 1/\sqrt{1+T^2}$ であり、符号は $T$ の符号と一致する（$T$ が正なら $\varphi$ は鋭角、負なら鈍角である）。これにより同じ 3 つの答えが得られる。また、$1 + (8+5\sqrt{3})^2 = 140 + 80\sqrt{3} = 1/x_2^2$ となることは、よい検算になる。

### 小問 (ii)

$\psi = \frac{1}{3}\tan^{-1} y$ とおく。$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$ であるから、$-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$ である。

**考えてみよう** 条件 $\cos\psi = 2/\sqrt{5}$ から得られる角は 1 つか、それとも 2 つか？

$(-\pi/6, \pi/6)$ 上で cos は偶関数（even function）であるから、$\cos\psi = 2/\sqrt{5} = \cos\theta$ より $\psi = \theta$ または $\psi = -\theta$ であり、$0 < \theta < \pi/6$ であるから、どちらも許される範囲にある。（これ以外の解はない。$[0, \pi/6)$ 上で関数 cos は狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、そこで値 $2/\sqrt{5}$ をとるのは 1 回だけであり、$(-\pi/6, 0]$ 上でも同様である。）

よって $\tan^{-1} y = \pm 3\theta$ である。$0 < 3\theta < \pi/2$ であるから、$\pm 3\theta$ はどちらも確かに $\tan^{-1}$ の値としてとりうるものであり、

$$y = \tan(\pm 3\theta) = \pm\frac{11}{2}.$$

となる。(ii) の解は $y = \frac{11}{2}$ と $y = -\frac{11}{2}$ である。

## 検算

- $\theta = \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636$ であるから、$3\theta \approx 1.3909$ であり、$\tan 3\theta \approx 5.5000$ となる。
- $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \approx 0.05992$、$x_3 \approx -0.83451$ である。電卓で計算すると、いずれについても $\tan(3\cos^{-1} x) \approx 5.5$ となり、$[-1,1]$ を細かく数値的に走査すると、解はちょうど 3 つ見つかる。
- $\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}(\pm 5.5)\right) = \cos(\pm 0.4636) \approx 0.8944 = 2/\sqrt{5}$ である。

## よくある間違い

- (i) で $x = 2/\sqrt{5}$ だけを答えてしまう。tan が $\pi$ ごとに繰り返すことを忘れているのであり、$3\varphi$ のとりうる値は $[0, 3\pi]$ に 3 つある。
- (ii) で $y = 11/2$ だけを答えてしまう。cos は偶関数なので、$\psi = -\theta$ も条件を満たす。
- 範囲を確認しない。答えは $\theta < \pi/6$ であることに依存しており、だからこそ (i) で $\theta + 2\pi/3$ が許され、(ii) で $3\theta$ が $\tan^{-1}$ の値域に入るのである。

## STEP のその先へ

逆三角関数（inverse trigonometric functions）は、1 対 1（one-to-one）でない関数の逆関数をとるという問題に初めて触れる場である。そこでは**主枝**（principal branch）を選ぶのであり、このような方程式は、実はどの枝の上にいるかという問題なのである。複素解析（complex analysis）では $\log z$ や $z^{1/3}$ について同じ問題が現れ、原点の周りを一周するとある枝から次の枝へと移る。これは、ここで $2\pi/3$ を $\theta$ に加えることとまったく同じである。Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は、図を用いて枝を見事に説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。