解答例

STEP I 2001、第 3 問

純粋数学 • 3 次方程式と判別式

> **STEP I 2001、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q3

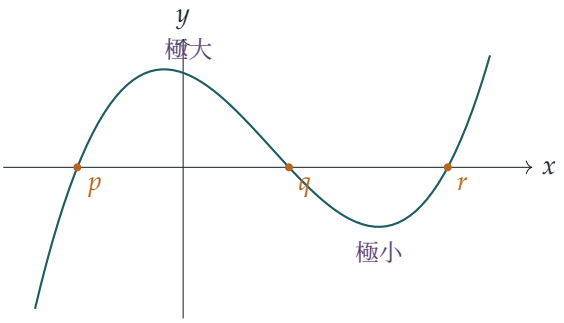
鍵となる考え方

相異なる 3 つの実数解をもつ 3 次関数（cubic）は、隣り合う解の間で必ず増減が入れ替わる。したがって、その導関数（derivative）である 2 次関数は相異なる 2 つの実数解をもつ。「相異なる 2 つの実数解をもつ」ことを「判別式（discriminant）が正」と言い換えれば、最初の不等式が得られる。後半では、与えられた積は 3 次式であり、その係数がちょうど示すべき不等式に現れる量になっている。そのため、前半の結果（あるいは平方完成（completing the square））を使えば示せる。

解答

グラフの概形

展開すると $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$ であるから、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to +\infty$、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to -\infty$ である。グラフが x 軸と交わるのは p、q、r だけであり、どの解も単解（simple root）なので、f はそれぞれの点で符号を変える。すなわち、$x < p$ で $f < 0$、(p,q) で $f > 0$、(q,r) で $f < 0$、$x > r$ で $f > 0$ である。よって、p と q の間のどこかに極大（local maximum）があり、q と r の間のどこかに極小（local minimum）がある。y 切片は $f(0) = -pqr$ である。



（図は $p<0<q<r$ の場合を描いたものである。解がどこにあっても形は同じであり、変わるのは y 軸の位置だけである。）

1つ目の不等式

完全に展開すると

$$f(x)=x^3-(p+q+r)x^2+(qr+rp+pq)x-pqr,$$

となるから

$$f'(x)=3x^2-2(p+q+r)x+(qr+rp+pq).$$

である。$f(p)=f(q)=0$ であるから、ロルの定理（Rolle's theorem）により、p と q の間（端点を除く）に f' の解が存在する。同様に、q と r の間（端点を除く）にも解が存在する。これらの区間は重ならないので、2次方程式 $f'(x)=0$ は**相異なる2つの実数解**をもつ。（ロルの定理を使わない場合：$f'(p)=(p-q)(p-r)>0$、$f'(q)=(q-p)(q-r)<0$、$f'(r)=(r-p)(r-q)>0$ であるから、f' はそれぞれの区間で符号を変える。）

2次方程式が相異なる2つの実数解をもつのは、判別式が正であるときであり、かつそのときに限る。よって

$$4(p+q+r)^2-12(qr+rp+pq)>0, \qquad \text{すなわち} \qquad (p+q+r)^2>3(qr+rp+pq),$$

となり、示された。

2つ目の不等式

展開すると

$$(x^2+gx+h)(x-k)=x^3+(g-k)x^2+(h-gk)x-hk.$$

である。これを f の展開式と比べる。この3次式が解 p,q,r をもつならば

$$p+q+r=-(g-k), \qquad qr+rp+pq=h-gk,$$

であるから、示すべき不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ は、この 3 次式の解に対する 1 つ目の不等式そのものである。

十分条件（*sufficient condition*）であること。 $g^2 > 4h$ と仮定する。このとき x^2+gx+h は相異なる 2 つの実数解 $\alpha < \beta$ をもち、3 次式は実数解 α、β、k をもつ。k がどちらとも異なれば、3 つの解は相異なるので、前半の結果からただちに $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ が得られる。

考えてみよう k がたまたま α または β に等しく、解が相異ならない場合はどうなるか？

前半では $p < q < r$ を仮定していたので、もう少し議論が必要である。恒等式（identity）

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]$$

により、左辺は $p=q=r$ でない限り正である。$\alpha \neq \beta$ であるから、3 つの解がすべて等しくなることはない。よって、この場合も不等式は成り立つ。

解をまったく使わない直接的な方法もある。展開すると

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2+gk+k^2-3h = (k+\tfrac{1}{2}g)^2 + \tfrac{3}{4}(g^2-4h),$$

となり、$g^2 > 4h$ のとき、これは平方と正の量の和であるから正である。いずれの方法でも、$g^2 > 4h$ は十分条件である。

必要条件（*necessary condition*）ではないこと。 $g^2 \leq 4h$ でありながら不等式が成り立つような値を見つければよい。$g=0$、$h=1$、$k=2$ とする。このとき $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$ であるが

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

となる。よって、$g^2 > 4h$ でなくても不等式は成り立ちうるので、この条件は必要条件ではない。

考えてみよう 前半では 3 つの実数解が必要だったのに、なぜこのようなことが起こるのか？

前半で実際に必要だったのは、$f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつことだけであり、これはより弱い条件である。ここでの 3 次式 $(x^2+1)(x-2) = x^3-2x^2+x-2$ は実数解を 1 つしかもたないが、$f'(x) = 3x^2-4x+1 = (3x-1)(x-1)$ であるから、停留点（stationary point）を 2 つもつ。不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ が意味するのは、ちょうど 3 次関数が相異なる極大と極小をもつということであり、グラフが x 軸と 3 回交わるかどうかは関係ない。

検算

- $p,q,r = 0,1,2$ のとき、$(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$ であり、$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ の解は $1 \pm 1/\sqrt{3}$ で、一方は $(0,1)$ に、もう一方は $(1,2)$ にある。
- 平方完成の式から、不等式の境界が最良であることがわかる。$g = 2$、$h = 1$（したがって $g^2 = 4h$）、$k = -1$ とすると $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$ となり、厳密な不等号ではなく等号が成り立つ。これは 3 つの解がすべて等しい 3 次式 $(x+1)^3$ である。
- 2 つの恒等式と 2 つの不等式を、それぞれ 20 000 個の無作為な有理数の場合について、さらに例 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$（$4 > 3$ となる）について、コンピュータで厳密に確かめた。

よくある間違い

- 3 次関数のグラフを上下逆に描いてしまう。x^3 の係数は $+1$ であるから、グラフは右に行くほど上がる。
- k が $x^2 + gx + h$ の解になっている場合を忘れる。この場合、前半の結果はそのままでは適用できない。
- $g^2 \leq 4h$ を満たす 1 つの例で不等式が成り立つことだけを示し、それを「十分条件」と呼んでしまう。1 つの例で示せるのは**必要条件でない**ことであり、十分条件であることを示すには、すべての g、h、k に対する証明が必要である。

STEP のその先へ

量 $(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq)$ は、定数倍を除けば導関数の判別式であり、解の**対称式**（symmetric function）である。このような式はすべて係数を用いて表すことができ、だからこそ不等式を解についての条件から g、h、k についての条件へと書き換えることができたのである。3 次式の本来の判別式 $\prod(p-q)^2$ は、3 つの解がすべて実数であるかどうかを決定する。この問題で使ったのは、そのより弱い親戚である。対称式と判別式はガロア（Galois）理論（Galois theory）へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、学び始めるのによい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。