解答例

STEP I 2001、第 2 問

純粋数学 • 代数的不等式

> **STEP I 2001、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

鍵となる考え方

不等式（inequality）では、符号のわからないものを両辺に掛けることはできない。そこで (i) で安全なのは、すべてを一方の辺に集めて因数分解（factorise）することである。そうすれば答えは符号図（sign diagram）から読み取れる。(ii) では平方根（square root）があるので 2 乗したくなるが、それが正当なのは両辺が非負であるとわかっている場合に限る。この条件を見失わないことが、この問題のすべてである。

解答

小問 (i)

x は負である可能性があるので、x を掛けることはできない。代わりに、$x \neq 0$ より真に正である x^2 を掛ける。こうすれば不等号の向きは変わらない：

$$\begin{aligned} 1+2x-x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2+2x^3-x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4-2x^3-x^2+2x \\ &\iff x\left(x^3-2x^2-x+2\right) < 0. \end{aligned}$$

この 3 次式（cubic）は項をまとめることで因数分解できる：

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

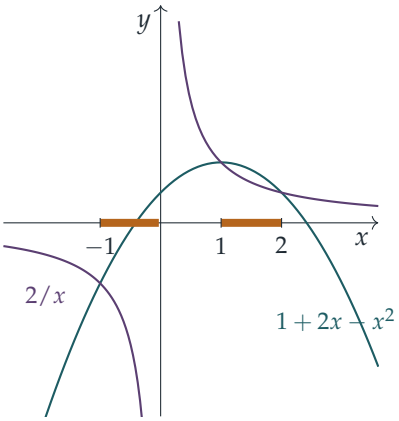
したがって、求める条件は

$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

である。これは最高次の係数（leading coefficient）が正で、4つの単根（simple root）$-1,0,1,2$ をもつ4次式（quartic）なので、x が各根を通過するたびに符号が入れ替わる。すなわち、$x>2$ では正、$(1,2)$ 上では負、$(0,1)$ 上では正、$(-1,0)$ 上では負、$x<-1$ では正である。根そのものでは値は0となり、<0 を満たさない（そもそも $x=0$ は除外されている）。よって

$$\boxed{-1<x<0 \quad \text{または} \quad 1<x<2.}$$

図もこれと一致する。放物線（parabola）$y=1+2x-x^2$ が双曲線（hyperbola）$y=2/x$ より上にあるのは、ちょうど交点 $x=-1$、1、2 の間であり、負の側では双曲線が $x=0$ で $-\infty$ へ落ち込むところまでに限られる。



小問 (ii)

まず、$x\geq -\frac{10}{3}$ ならば $3x+10\geq 0$ であるとともに $x+4\geq \frac{2}{3}>0$ でもあるので、2つの平方根はつねに定義されていることに注意する。

両辺はともに非負であり、$a,b\geq 0$ に対しては $a>b \iff a^2>b^2$ が成り立つ。したがって、解を増やしたり失ったりすることなく2乗してよい：

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10}>2+\sqrt{x+4} &\iff 3x+10>4+4\sqrt{x+4}+(x+4)\\ &\iff 2x+2>4\sqrt{x+4}\\ &\iff x+1>2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

考えてみよう もう一度そのまま2乗してよいだろうか？

すぐにはできない。右辺 $2\sqrt{x+4}$ は正であるが、$x+1$ は負になりうる。その場合、2乗すると偽の不等式が真の不等式に変わってしまうおそれがある。そこで場合分けをする。

- $x+1 \leq 0$ のとき、左辺は高々 0 であるのに対し、右辺は真に正である。よって不等式は成り立たない。
- $x+1 > 0$ のとき、両辺はともに正なので、2 乗する操作はやはり可逆である：

$$\begin{aligned} x+1 > 2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1 > 4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15 > 0 \\ &\iff (x-5)(x+3) > 0, \end{aligned}$$

これが成り立つのは $x > 5$ または $x < -3$ のときである。$x > -1$ と合わせると、残るのは $x > 5$ である。

したがって

$$\boxed{x > 5.}$$

検算

- $x = 5$ のとき、$\sqrt{25} = 5$ かつ $2+\sqrt{9} = 5$ なので等号が成り立つ。境界では当然そうなるはずである。$x = 12$ のとき、$\sqrt{46} \approx 6.78 > 2+4 = 6$。$x = 0$ のとき、$\sqrt{10} \approx 3.16 < 4$。
- (i) では、$x = 1.5$ のとき $1.75 > 1.33$、$x = -0.5$ のとき $-0.25 > -4$ となり、どちらも真である。$x = 0.5$ のときは $1.75 < 4$ となり、偽である。
- コンピュータで、それぞれの不等式を 2×10^5 個の無作為な点と、各境界から 10^{-6} 以内の点で検証したところ、上の答えと食い違う点は見つからなかった。

よくある間違い

- (i) で $x > 0$ と $x < 0$ に場合分けせずに x を掛けてしまう。これでは区間 $(-1, 0)$ を落としたり、そこで答えを逆にしてしまったりする。
- $x+1 > 0$ を要求せずに $x+1 > 2\sqrt{x+4}$ を 2 乗してしまう。すると見かけ上の区間 $-\frac{10}{3} \leq x < -3$ が出てくる。もとの不等式に $x = -3.2$ を代入してみれば、成り立たないことがわかる（$\sqrt{0.4} \approx 0.63 < 2+\sqrt{0.8}$）。

STEP のその先へ

(ii) の原理、すなわちある操作が不等式を保つのは、それが関係する値の範囲で増加関数（increasing function）であるときに限るという考え方は、解析学で不等式を扱う

方法の出発点である。$t \mapsto t^2$ は $[0, \infty)$ 上では増加であるが、$\mathbb{R}$ 上ではそうではない。積の符号図は、連続関数（continuous function）はゼロを通過することによってしか符号を変えられないという事実、すなわち中間値の定理（intermediate value theorem）へと一般化される。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。