解答例

STEP I 2001、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付きポアソン分布

> **STEP I 2001、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q13

鍵となる考え方

割れた皿の総数で条件付け(conditioning)をすると、ポアソン分布(Poisson distribution)の問題が二項分布（binomial distribution）の問題に変わる。4 人の学生がそれぞれ独立（independent）に同じ割合で皿を割るならば、割れた皿の総数がわかった時点で、割れた各皿は他の皿とは独立に、4 人のうちの誰が割ったものである確率も等しい。したがって、割れた皿のうち数学者が割った枚数は二項分布に従い、未知の λ は消えてしまう。

解答

設定

数学者が割った皿の枚数を M とし、他の 3 人の学生が割った皿の総数を R とする。問題文より、各学生が割る枚数は他の学生とは独立に $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従う。よって $M \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ であり、R は独立な 3 つの $\mathrm{Po}(\lambda)$ 確率変数の和であるから $\mathrm{Po}(3\lambda)$ に従う。また、R は他の 3 人の学生のみに依存するので、M と R は独立である。総数は $T = M + R \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$ である。

> **考えてみよう** 独立なポアソン確率変数の和が再びポアソン分布に従うのはなぜか？

独立な $X \sim \mathrm{Po}(\alpha)$ と $Y \sim \mathrm{Po}(\beta)$ について、n の分け方すべてにわたって和をとると

$$\mathrm{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\beta}\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^n}{n!},$$

となる。最後の等号は二項定理（binomial theorem）による。よって $X+Y \sim \mathrm{Po}(\alpha+\beta)$ である。これを 2 回適用すると $R \sim \mathrm{Po}(3\lambda)$ が得られ、さらにもう 1 回適用すると $T \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$ が得られる。

M の条件付き分布

$m = 0, 1, \ldots, 5$ に対して、事象 $\{M = m,\ T = 5\}$ は $\{M = m,\ R = 5-m\}$ と同じである。M と R の独立性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M = m \mid T = 5) &= \frac{\mathrm{P}(M = m)\,\mathrm{P}(R = 5-m)}{\mathrm{P}(T = 5)} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-3\lambda}(3\lambda)^{5-m}}{(5-m)!}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-4\lambda}(4\lambda)^5}{5!}} \\
&= \frac{5!}{m!\,(5-m)!} \cdot \frac{3^{5-m}}{4^5} = \binom{5}{m}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^{5-m}.
\end{aligned}$$

指数関数は約分され、λ のべきもすべて約分される（分子と分母にともに λ^5 がある）。よって $T = 5$ という条件のもとで、λ の値にかかわらず $M \sim \mathrm{B}(5, \frac{1}{4})$ となる。

答え

$m = 3, 4, 5$ に対する二項分布の確率を足し合わせると

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5) &= \binom{5}{3}\frac{3^2}{4^5} + \binom{5}{4}\frac{3}{4^5} + \binom{5}{5}\frac{1}{4^5} \\
&= \frac{10 \times 9 + 5 \times 3 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}.
\end{aligned}$$

よって、5 枚の皿のうち 3 枚以上を数学者が割った確率は $\dfrac{53}{512} \approx 0.104$ である。

検算

- 6 つの条件付き確率 $\binom{5}{m}3^{5-m}/4^5$ の和は $(1+3)^5/4^5 = 1$ であり、確かにそうなるべき値になっている。
- 対称性（symmetry）：同じ議論により、5 枚の皿のうち各学生が割った枚数の期待値（expected value）は $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ であり、4 人分を合計すると 5 になる。
- $\lambda = 0.3, 1, 2.7$ および 5 について、4 つのポアソン分布から（5 回の破損を 4 人の学生に割り振るすべての方法にわたって和をとって）$\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5)$ を直接計算したところ、いずれの場合も $0.103515625 = 53/512$ が得られた。また、皿洗い 4×10^5

回分のシミュレーションを行ったところ、ちょうど 5 枚が割れた回の中での割合はおよそ 0.105 であった。

よくある間違い

- 答えに λ が残ってしまう。これは必ず約分されるはずであり、残るならば条件付けのどこかで誤っている。
- $\mathrm{P}(M+R=5)$ で割っているのに、R を $\mathrm{Po}(3\lambda)$ ではなく $\mathrm{Po}(\lambda)$ として扱ってしまう。これでは学生が 2 人しかいないことになる。
- 二項係数（binomial coefficient）を忘れる、あるいは事象を「3 枚以上」ではなく「ちょうど 3 枚」として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは次の一般的な事実の小さな例である：$X_1, \ldots, X_k$ がそれぞれ平均 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ の独立なポアソン確率変数であるとき、それらの和が n であるという条件のもとで、ベクトル $(X_1, \ldots, X_k)$ は確率 $\lambda_i / \sum \lambda_j$ の多項分布（multinomial distribution）に従う。逆向きに読むと、$\mathrm{Po}(\mu)$ に従う個数の事象のそれぞれに、k 種類のうちの 1 つのラベルを独立に付けるとき、各種類の個数は独立なポアソン確率変数になる、ということである。この「ポアソン分割（Poisson splitting）」は、ポアソン過程（Poisson process）の研究における基本的な道具である。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）では、両方向について多くの例とともに論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。