解答例

# STEP I 2001、第 12 問

確率・統計 ・ 樹形図

> **STEP I 2001、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q12

## 鍵となる考え方

すべては**誰が何を知っているか**を注意深く追跡することにかかっている。ある生徒が「ある人がうわさを聞いた」と知っているのは、その人から聞いた場合か、自分がその人に伝えた場合に限られる。誰も、自分がうわさをどこから聞いたかは伝えない。各段階で各生徒の知識を記録していけば、樹形図（tree diagram）は小さくなる。どの分岐も 2 人のうちどちらかを選ぶものなので、経路は 8 本しかなく、しかもそれらはすべて等しく起こりやすいことがわかる。

## 解答

### 設定

4 人の生徒を $A, B, C, D$ と書く。どの段階においても、生徒 $X$ が「うわさを聞いた」と**知っている**人は次のとおりである：$X$ 自身、$X$ にうわさを伝えた人、そして $X$ がうわさを伝えた相手。$X$ がうわさを聞くと、$X$ はこの集合の外にいる人の中から一様ランダムに（uniformly at random）1 人を選ぶ。その集合がすでに 4 人全員を含んでいれば、うわさは $X$ で止まる。

最初に $A$ が $C$ に伝えているので、$A$ は $\{A, C\}$ を知っており、$C$ も $\{A, C\}$ を知っている。

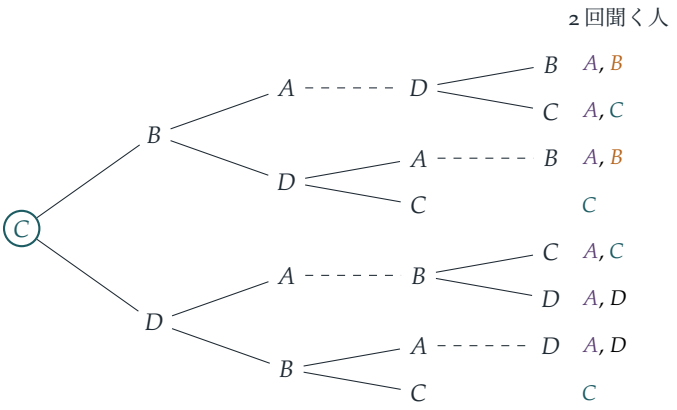
### 樹形図

$C$ は $A$ を除外し、$B$ または $D$ にそれぞれ確率（probability）$\frac{1}{2}$ で伝える。まず枝 $C \to B$ を考える。このとき $C$ は $\{A, B, C\}$ を知っており、$B$ は $\{B, C\}$ を知っている（$A$ は含

まれない。$C$ はうわさの出どころを言わなかったからである)。したがって $B$ は $A$ または $D$ にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で伝える。

- $B \to A$。アーサー（Arthur）はいまや $\{A, B, C\}$ を知っているので、$D$ に伝えるしかなく、その後アーサーは全員が聞いたことを知る。$D$ は $\{A, D\}$ しか知らないので、$D$ は $B$ または $C$ にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で伝える。どちらの場合も、聞いた人の集合は完成する。$B$ はすでに $\{A, B, C\}$ を知っており、$C$ も同様であって、どちらも新たに $D$ のことを知るからである。よってうわさは止まる。
- $B \to D$。このとき $B$ は $\{B, C, D\}$ を、$D$ は $\{B, D\}$ を知っているので、$D$ は $A$ または $C$ に伝える。
  - $D \to C$：$C$ はすでに $\{A, B, C\}$ を知っており、新たに $D$ のことを知るので、うわさは止まる。アーサーが再びうわさを聞くことはない。
  - $D \to A$：アーサーは $\{A, C, D\}$ を知っているので $B$ に伝え、$B$ はそれで 4 人全員を知ることになる。うわさは止まる。

枝 $C \to D$ は、$B$ と $D$ の役割を入れ替えれば同じである。以下に樹形図全体を示す。強制される手（確率 1）は破線で示し、それ以外のすべての枝の確率は $\frac{1}{2}$ である。




葉に至る各経路には、確率 $\frac{1}{2}$ の選択がちょうど 3 回含まれる（強制される手は因子 1 を与えるだけである)。したがって 8 通りの結果はそれぞれ確率 $\frac{1}{8}$ をもつ。右側のラベルは、その経路でうわさを 2 回聞く人を示している。（どの経路でも、1 人の生徒がうわさを聞くのは高々 2 回である。）

**考えてみよう** $C$ から聞いたばかりの $B$ は、なぜアーサーがうわさを聞いたことを知らないのか。

$C$ は誰から聞いたかを言わないからである。$B$ が推論できるのは、$C$ がうわさを聞いたということだけである。これがうわさを続かせる要因である。実際、枝 $C \to B \to A$

では、アーサーはすでに知っていることを伝えられる。

### アーサーが再び聞く

アーサーは、2本の短い経路 $C \to B \to D \to C$ と $C \to D \to B \to C$ を除くすべての経路でうわさを再び聞く。よって

$$\mathrm{P}(\text{アーサーが再び聞く}) = 1 - 2 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4},$$

となり、示すべきことが得られた。

### バーサとチャンドラ

バーサ（Bertha）が2回聞くのは経路 $C \to B \to A \to D \to B$ と $C \to B \to D \to A \to B$ の場合に限られるので、

$$\mathrm{P}(\text{バーサが2回聞く}) = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

チャンドラ（Chandra）は4本の経路で2回聞く。樹形図の上半分と下半分にそれぞれ2本ずつ（$C \to B \to A \to D \to C$、$C \to B \to D \to C$、$C \to D \to A \to B \to C$ および $C \to D \to B \to C$）あるので、

$$\mathrm{P}(\text{チャンドラが2回聞く}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

チャンドラがバーサよりも再びうわさを聞きやすいのは、チャンドラが早い段階で聞いたからである。連鎖の後のほうで伝えられた人々はチャンドラが聞いたことを知らないので、チャンドラは最後まで伝える相手の候補であり続ける。

## 検算

$B$ と $D$ の対称性から、デリラ（Delilah）が2回聞く確率も $\frac{1}{4}$ になるはずであり、実際に樹形図にはそのような経路が2本ある。結果の総和も正しい。等確率の葉が8つあり、確率の合計は1である。この過程をコンピュータで厳密に数え上げると $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ が得られ、200 000 回のうわさのシミュレーションでは 0.750, 0.250, 0.501 となった。

## よくある間違い

- 聞いた人が、連鎖をさかのぼった全員のことを知っているとしてしまう。伝わるのは伝えた人が誰かということだけであり、完全な知識があればうわさがアーサーに戻ってくることは決してない。
- 伝えた人も何かを知るということを忘れる。$Y$ に伝えた後、$X$ は $Y$ が聞いたことを知っている。これがアーサーの手を強制するのである。

- アーサーが再び聞いた時点で樹形図を打ち切ってしまう。バーサとチャンドラについて考えるには、その後の枝が必要である。

## STEP のその先へ

このうわさは 4 人の生徒の上のランダムウォーク（random walk）であり、その規則は履歴に依存する。ここではその履歴を各生徒の知識として記録した。次の一歩が現在の状態だけに依存するよう状態を十分に豊かにとれば、これは**マルコフ連鎖**（Markov chain）になる。マルコフ連鎖は確率過程の入門講義の中心的な対象であり、うわさや感染症のモデルはその古典的な応用例である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにちょうどよい水準でマルコフ連鎖を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。