解答例

STEP I 2001、第 11 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

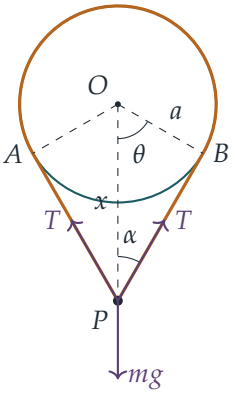
> **STEP I 2001、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q11

鍵となる考え方

質点がバンドを下に引くと、バンドはその長さの大部分で円柱に接したまま、両側で**接線方向に**（tangentially）円柱から離れ、質点まで真っすぐに張られる。したがって、すべては円の外部の点から引いた 2 本の接線の幾何に帰着する。円柱はなめらかなので、張力（tension）はバンド全体を通じて等しく、**全体の**伸び（extension）を用いたフックの法則（Hooke's law）によって張力が求まる。そのうえで、小問 (i) はエネルギーの問題（質点は最下点で一瞬静止する）であり、小問 (ii) は力の問題（速さが最大となるのは加速度が 0 のとき）である。

解答

質点を質点（point mass）として、バンドを軽い弾性体（フックの法則に従う）として、円柱をなめらかなものとしてモデル化する。断面の中心を O とし、質点 P が O の下方距離 x の位置にあるとする。ただし $x \geq a$ である。バンドは点 A と点 B で円から離れ、PA と PB は接線である。



幾何と張力

三角形 OAP は A で直角である（接線は半径に垂直である）から、

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

が成り立つ。ここで $\theta = \angle AOP$、$\alpha = \angle APO$ であり、後者はバンドの直線部分がそれぞれ鉛直方向となす角である。バンドは、P に最も近い中心角 2θ の弧 AB を除くすべての部分で円に接しているので、その長さは

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

である。自然長は $2\pi a$ なので、伸びは

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

となる。円柱はなめらかなので、バンドに沿って摩擦ははたらかず、張力 T は全体で等しい。フックの法則により $T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$ である。

$x = 2a$ のとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$ なので、$\theta = \frac{\pi}{3}$、$\alpha = \frac{\pi}{6}$、$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$ である。よって

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

小問 (i)

放した瞬間、質点は円柱の最下部 $x = a$ にあり、バンドは伸びておらず、質点は静止している。$x = 2a$ で質点は再び静止する（それ以上は落下しない）ので、どちらの時点でも運動エネルギーは 0 である。円柱はなめらかなのでエネルギーは失われず、重力による位置エネルギーの減少量は弾性エネルギーの増加量に等しい。質点が落下した距離は $2a - a = a$ であり、自然長 $2\pi a$、伸び e のバンドの弾性エネルギーは $\dfrac{\lambda e^2}{2 \cdot 2\pi a}$

である。したがって

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a} \cdot \frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2}{9\pi},$$

となり、これより

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2},$$

が得られ、題意が示された。

考えてみよう バンドの一部が円柱に巻きついているのに、バンド全体に弾性エネルギーの公式を用いてよいのだろうか。

よい。円柱はなめらかなので、巻きついている部分もそうでない部分も、張力、したがって単位長さあたりの伸びはバンド全体で等しい。バンドは自然長 $2\pi a$、全体の伸び e の 1 本の弾性ひもとまったく同じようにふるまい、公式 $\lambda e^2/(2l)$ が表しているのはまさにそれである。

小問 (ii)

速さが最大となるのは加速度が 0 のとき、すなわち質点にはたらく合力が 0 のときである。水平方向については、対称性により 2 つの張力がつり合う。P において鉛直方向に分解すると、

$$2T\cos\alpha = mg.$$

$x = 2a$ では $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので $\sqrt{3}\,T = mg$ となり、$T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$ を得る。上で求めた伸びを用いてフックの法則を適用すると、

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a} \cdot \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

T についての 2 つの式を等置すると、

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

考えてみよう これが単なる停留点ではなく、速さの最大であることはどうしてわかるのだろうか。

x が増加すると、e は増加し（バンドの各直線部分が伸びる速さは、弧 $a\theta$ が縮む速さより大きい）、$\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$ も増加する。したがって上向きの力 $2T\cos\alpha$ は 0 から単調に増加する。下向きの正味の力は $x = 2a$ より上では正、下では負であるから、質点は $x = 2a$ までは加速し、その後は減速する。

検算

- 見事な整合性の確認：L を微分すると $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$ となる。よって弾性エネルギーの変化率 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ は上向きの力 $2T\cos\alpha$ に等しい。(i) のエネルギーによる方法と (ii) の力による方法は一致する。
- 数値的には、(i) で $\lambda \approx 6.70\,mg$、(ii) で $\lambda \approx 2.65\,mg$ である。(ii) のバンドのほうが弱いのは理にかなっている。(ii) では質点は $x = 2a$ でまだ運動しており、そこを通り過ぎていくのに対し、(i) ではより硬いバンドがすでに質点を静止させているからである。
- 運動方程式 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$ を $x = a$ での静止状態から数値的に解き進めると、1 つ目の λ の値では最下点が $x = 2.0000a$ となり、2 つ目の値では速さの最大が $x = 2.0000a$ で得られる。

よくある間違い

- バンドの一部が円柱から離れることを忘れる：伸びは 2 つの直線部分の長さだけではなく、$2\sqrt{x^2-a^2}$ から失われた弧 $2a\theta$ を**引いたもの**である。
- 落下距離を放した点からではなく円柱の軸から測ってしまう：質点が落下する距離は a であり、$2a$ ではない。
- 鉛直方向に分解するときに $\cos\alpha$ ではなく $\sin\alpha$ を用いてしまう。α は鉛直方向から測った角であり、$\sin\alpha = a/x$ である。

STEP のその先へ

d(弾性エネルギー)/dx が復元力に等しいという確認は、仮想仕事の原理（principle of virtual work）の一例である。すなわち、保存系においては、任意の方向の力は、その方向への位置エネルギーの変化率に負号をつけたものに等しい。系を 1 つの座標とその位置エネルギーによって記述するというこの視点は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点であり、大学の力学の講義の 1 年目か 2 年目で出会うことになる。エネルギー、力、ポテンシャルについての丁寧な解説としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。