解答例

STEP I 2001、第 10 問

力学 ・ 放物運動の飛行時間

> **STEP I 2001、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q10

鍵となる考え方

選択を二つに分けて考える。仰角（elevation）によって飛行時間（time of flight）と水平到達距離（range）の両方が決まり、方向は砲を中心とする円周上のどこに砲弾が落ちるかを決めるだけである。したがって、砲弾が線路に命中しうるのは、水平到達距離が d 以上であるときに限られる。飛行時間は仰角とともに増加するが、45° を超えると水平到達距離は減少する。そこで、水平到達距離がちょうど d に減るまで仰角を上げていけばよい。

解答

与えられた仰角に対する飛行時間と水平到達距離

砲弾を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点（particle）としてモデル化する。砲弾は地表から発射され、平原に着地するものとする。仰角を α とし、$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ とする。速度の鉛直成分は $v\sin\alpha$、水平成分は $v\cos\alpha$ である。

鉛直方向について、時刻 t における高さは $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ であり、これが再び零になるのは

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

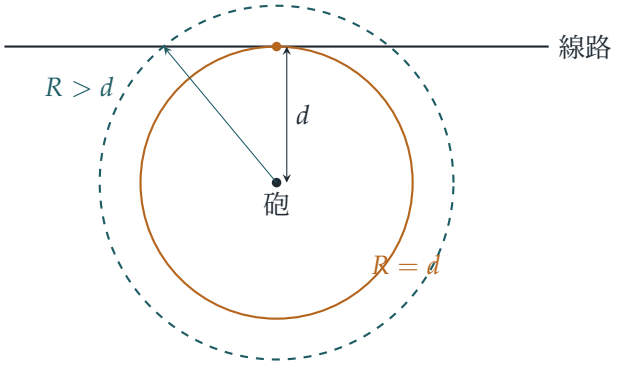
のときである。その間に砲弾が水平方向に進む距離は

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

である。

砲弾が線路に命中しうるのはいつか

仰角を固定して砲の向きを変えると、着地点は砲を中心とする半径 R の円周上を動く。線路上で砲に最も近い点までの距離は d であり、線路上の他の点はすべてそれより遠い。したがって、円が線路と交わるための必要十分条件は $R \geq d$ である。$R = d$ のとき円は線路にちょうど接し、砲は最も近い点、すなわち線路に垂直な方向に真っすぐ向けなければならない。



（上から見た図である。破線の円はより低い仰角の場合で、線路と 2 点で交わる。実線の円は最適な仰角の場合で、線路にちょうど届く。）

よって、仰角 α で線路に命中させられるのは、ちょうど

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

が成り立つときである。$k = gd/v^2$ とおく。$v^2 > gd$ が与えられているので $0 < k < 1$ であり、条件を満たす仰角が存在する。（最大の水平到達距離は 45° のときの v^2/g であるから、この条件は単に線路が射程内にあることを述べている。）

飛行時間の最大化

$T = 2v\sin\alpha/g$ であり、$\sin\alpha$ は $(0, \frac{\pi}{2}]$ で増加するから、T を最大にするには、許される範囲で**最大の** α を選べばよい。

$0 < 2\alpha \leq \pi$ のとき、条件 $\sin 2\alpha \geq k$ が成り立つのは、ちょうど

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

のときである。したがって、許される最大の仰角は $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$ であり、これは 45° より大きい。この仰角では $\sin 2\alpha = k$ であり、2α は $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあるので $\cos 2\alpha$ は負である：

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

考えてみよう 線路上の遠く離れた点を狙えば、砲弾はより遠くまで飛ぶのだから、そのほうがよいのではないか？

そうではない。より遠くまで飛ばすには**より大きな**水平到達距離が必要であり、45° より上ではそれは**より低い**仰角を意味し、したがって飛行時間は短くなる。飛行時間は仰角だけで決まるので、最善なのは線路に届く範囲で最も急な射撃である。その水平到達距離はちょうど d であるから、砲弾は砲から線路に下ろした垂線の足に着地する。

ここで T を 2 乗し、$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

となる。ただし、v^2 を根号の中に入れた（$v^2 > 0$ なのでこれは許される）。これが求める結果である。

検算

- $d \to 0$ のとき、公式から $g^2T^2 \to 4v^2$、すなわち $T \to 2v/g$ が得られる。これは真上に発射する場合であり、可能な最長の飛行である。線路が砲のすぐそばを通る場合として正しい。
- $v^2 = gd$ のとき、線路はぎりぎり射程内にある。可能な射撃は 45° のものだけであり、公式は $g^2T^2 = 2v^2$ を与える。これは $T = 2v\sin 45°/g = \sqrt{2}\,v/g$ と一致する。
- 数値的に、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 100\,\mathrm{m}$、$v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ とすると、最適な仰角は約 71.1° であり、公式は $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$ を与える。運動を数値的に刻んで追跡しても同じ時間が得られ、砲弾は線路上に着地する。あらゆる仰角についての総当たり探索も、数百のランダムな場合で公式と一致する。

よくある間違い

- 小さいほうの解 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$ を取ってしまう。この射撃でも線路には命中するが、飛行時間は最長ではなく**最短**になる。実質的には $\cos 2\alpha$ の符号を取り違えていることになる。
- 最初から、砲弾は線路上の最も近い点に着地しなければならないと仮定してしま

う。結果的にそれは正しいが、上で述べた議論が必要である。すなわち、他のどの点もより大きな水平到達距離を必要とし、したがってより低い仰角を必要とする。

STEP のその先へ

これは小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である。ある制約（線路に届くこと）のもとで一つの量（飛行時間）を最大化するものであり、最適解は許される範囲の境界上にある。大学 1 年次の力学や最適化の講義では、ラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）のような、このための一般的な道具に出会うだろう。また、関連する考え方として、すべての軌道の**包絡線**（envelope）（「安全放物線」（parabola of safety））がある。これは砲が到達しうるすべての点の境界を与えるものである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や質点の力学の理解を深めるのに適した一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。