解答例

STEP I 2001、第 1 問

純粋数学 ・ 幾何的不等式

> **STEP I 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q1

鍵となる考え方

正方形の相異なる 3 辺上にある 3 点は、必ず向かい合う 1 組の辺を使い、残りの 1 辺はその 2 辺をつなぐ辺になる。正方形に座標を入れ、各点が 0 以上 1 以下の自由なパラメータを 1 つだけもつようにする。そのうえで背理法（proof by contradiction）で論じる。三角形の 3 辺がすべて上界より長いとすると、各辺の長さの条件がそれぞれ 1 つのパラメータを締めつけ、それらを合わせると 1 点が正方形からはみ出してしまうのである。

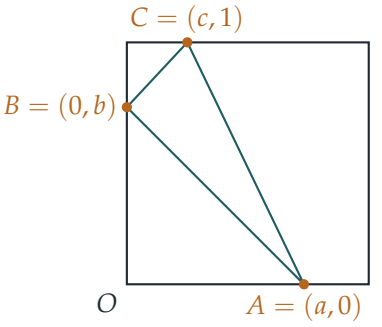
解答

長さの単位は cm とする。辺は 4 本で、3 点はそれぞれ異なる辺上にあるから、3 点が乗らない辺はちょうど 1 本である。したがって、2 点は向かい合う 1 組の辺上にあり、残りの 1 点はその両方に隣り合う辺上にある。正方形が $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ となるように座標軸をとり、

$$A = (a, 0)\text{（下の辺上）}, \qquad B = (0, b)\text{（左の辺上）}, \qquad C = (c, 1)\text{（上の辺上）},$$

とする。ただし $a, b, c \in [0, 1]$ である。（正方形を回転・反転しても長さは変わらないので、これで一般性を失わない（without loss of generality）。）このとき

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1 - b)^2, \qquad CA^2 = (c - a)^2 + 1.$$



$k = \sqrt{6} - \sqrt{2}, t = 2 - \sqrt{3}$ とおく。次の 2 つのちょっとした事実によって、数値の扱いがうまくいく。

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{よって} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

また $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ であるから $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$ であり、したがって

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

背理法の仮定として、三角形の 3 辺がすべて k より長いとする。正方形を直線 $y = \frac{1}{2}$ に関して折り返す対称性（これにより A と C の役割、および a と c の役割が入れ替わる）から、$c \geq a$ と仮定してよい。

$BC > k$ **から**。 $c \leq 1$ であるから

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

よって $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$ である。$1 - b \geq 0$ かつ $t > 0$ であるから $1 - b > t$、すなわち $0 \leq b < 1 - t$ を得る。

$AB > k$ **から**。 $0 \leq b < 1 - t$ より $b^2 < (1 - t)^2$ であるから

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

$a \geq 0$ であるから $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$ を得る。

考えてみよう a の範囲は絞り込めた。3 つ目の辺 CA からは何がわかるだろうか？

辺 CA は正方形を下から上へ横切るので、縦方向の長さは 1 であり、残りの長さは横方向で稼がなければならない。

$CA > k$ **から**。 $(c - a)^2 + 1 > k^2$ より $(c - a)^2 > t^2$ であり、$c \geq a$ であるから $c - a > t$ となる。よって

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

しかし C は上の辺上にあるので $c \le 1$ である。この矛盾により、3 辺がすべて k より長いことはありえない。すなわち、三角形 ABC の少なくとも 1 辺の長さは $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm 以下であり、題意は示された。

上界は達成される

$c = 1, a = b = \sqrt{3}-1$、すなわち $A = (\sqrt{3}-1, 0), B = (0, \sqrt{3}-1), C = (1,1)$ のとき、上の不等式はすべて等号に近づく限界の状態になる。このとき

$$AB^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3},$$

であるから、ABC は 1 辺がちょうど k の正三角形（equilateral triangle）である（C は頂点にあるが、上の辺上にあるものとみなす）。したがって $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ は最良の定数である。三角関数で表せば $k = \sec 15^\circ$ であり、これは単位正方形に収まる最大の正三角形で、正方形の辺に対して 15° 傾いている。

検算

- $k = \sqrt{6}-\sqrt{2} \approx 1.0353$ は正方形の 1 辺より少しだけ大きく、これは妥当である。3 辺それぞれに頂点をもつ三角形は、すべての辺を 1 より長くできるが、それはほんのわずかである。
- $(a,b,c) \in [0,1]^3$ の組を 2×10^6 個ランダムに探索したところ、最短辺は 1.0337 を超えることがなく、k を下回った。上の正三角形の例では、3 辺とも機械精度で 1.03528 に等しい。
- $\sec 15^\circ = 4/(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ であり、正三角形の図と一致する。

よくある間違い

- 証明なしに、三角形が正三角形である、あるいは 1 つの頂点が正方形の角にあると仮定してしまう。極値をとる場合は答えを示唆するが、あらゆる配置に対して不等式を証明したことにはならない。
- 設定の正当化を忘れる。構造上の鍵となる事実は、相異なる 3 辺には必ず向かい合う 1 組の辺が含まれるということである。
- $(1-b)^2 > t^2$ や $(c-a)^2 > t^2$ の平方根をとるときに、どちらの符号を考えているかを述べない。

STEP のその先へ

これは小さなマックス・ミン（max–min）問題である。配置全体からなるコンパクト（compact）な集合上で最短辺を最大化しており、極値をとる配置ではすべての制約が同時に等しくなる。これは最適化（optimisation）やゲーム理論（game theory）に一貫して現れるパターンである。$[0,1]^3$ は有界閉集合であり、最短辺は連続関数（continuous function）であるから、最大値は必ず存在する。これは解析学（analysis）の最初の講義で証明される事実である（最大値・最小値の定理（extreme value theorem））。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）はこの内容をよく扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には同じ趣向の STEP の幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。