解答例

STEP III 2000、第 9 問

力学 ・ 斜め弾性衝突

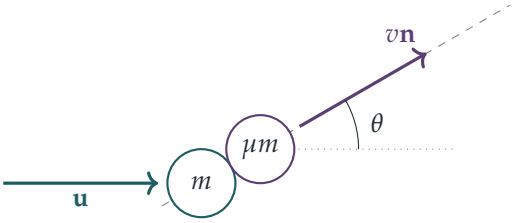
> **STEP III 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q9

鍵となる考え方

円板はなめらか（smooth）なので、衝突の間に両者の間にはたらく力は中心線（line of centres）に沿った力だけである。したがって、はじめ静止している円板はその直線に沿って動き出す。つまり $\mathbf{n}$ こそが中心線の方向である。その速度を $v\mathbf{n}$ とおき、運動量保存則（conservation of momentum、ベクトルの等式である）を用いてもう一方の円板の速度を求め、そのうえで運動エネルギー保存則（conservation of kinetic energy）によって v を決定する。小問 (ii) はエネルギーの等式をもう一つ立てるだけであり、不等式は余弦が 1 以下であることを要請することから得られる。

解答

円板を、なめらかな水平面上のなめらかな質点としてモデル化する。したがって、円板どうしの間にも、円板と面の間にも摩擦はない。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{n}$ のなす角を θ とし、$u = |\mathbf{u}|$ とおく。すると $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$ である。



衝突の瞬間、中心線（破線）は $\mathbf{n}$ の方向を向いており、$\mathbf{u}$ の方向（点線）と角 θ をなす。この図は模式図にすぎず、式の計算には必要ない。

小問 (i)

質量 μm の円板ははじめ静止しており、衝突の間にこれにはたらく水平方向の力は、もう一方の円板からの接触力だけである。この力は中心線に沿ってはたらく。この円板は $\mathbf{n}$ の方向に動き出すので、衝突後の速度はある速さ $v > 0$ を用いて $v\mathbf{n}$ と表せる。

質量 m の円板の衝突後の速度を $\mathbf{w}$ とする。運動量保存則より

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）なので、運動エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ を用いると

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

これを代入し、$\frac{1}{2}m$ と u^2 を消去すると

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

ここで $\mu > 0$ であり、衝突された円板は実際に動くので $v \neq 0$ である。よって μv で割ることができ、

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

を得る。これが求める速さである。副産物として、$v > 0$ から $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$ がわかるので、$0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ である。

考えてみよう なぜここではニュートンの実験法則（Newton's experimental law、反発の法則）を使う必要がないのだろうか。

使うこともできる。$e = 1$ のとき、相対速度の $\mathbf{n}$ 方向の成分は向きが逆になり、$\mathbf{n}$ に垂直な成分は円板がなめらかなので変化しない。しかし「完全弾性」とは運動エネルギーが保存されるという意味であり、そのただ一つのスカラーの等式と運動量保存則だけで、すでに v は決まってしまう。上の計算はこれとまったく同値であり、成分に分ける手間を省いている。

小問 (ii)

衝突後の運動エネルギーの総和は、はじめの $\frac{1}{2}mu^2$ に等しい。二つの円板がこれを等分するならば、それぞれが $\frac{1}{4}mu^2$ をもつので、衝突された円板について

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

小問 (i) の結果に $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$ を用いると $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$ であるから

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

（小問 (i) の最後で示したように）$\cos\theta > 0$ なので、正の平方根をとって

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

このような角が存在するためには $\cos\theta \le 1$、すなわち $\cos^2\theta \le 1$ でなければならない：

$$\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 \iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad \text{（両辺に}8\mu > 0\text{ を掛けた）}$$
$$\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.$$

2 次式 $\mu^2 - 6\mu + 1$ の根は $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$ であり、この式が負または零となるのはちょうど二つの根の間である。したがって

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

となり、示すべきことが示された。（下限は正であり $3 - \sqrt{8} \approx 0.172$ なので、$\mu > 0$ と矛盾しない。）逆に、この範囲のどの μ に対しても、公式は $(0, 1]$ に属する正当な余弦の値を与えるので、エネルギーの等分は実際に可能である。範囲の両端では $\theta = 0$ であり、これは正面衝突（head-on collision）である。

検算

- 正面衝突の場合：$\mathbf{n}$ が $\mathbf{u}$ に平行ならば、小問 (i) から $v = 2u/(1+\mu)$ となり、これはおなじみの 1 次元の弾性衝突の結果である。$\mu = 1$ のときは $v = u$ となる。スヌーカー（snooker）でよく見るように、動いていた円板は止まり、その運動をすべて相手に渡す。
- 質量が等しい場合、$\mu = 1$：小問 (ii) から $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$、すなわち $\theta = 45°$ となる。これは、質量の等しいなめらかな円板は弾性衝突の後に互いに直角の方向へ動き出すという古典的な事実と合致する。さらにエネルギーが等しいことから二つの速さも等しくなり、それぞれが $\mathbf{u}$ と $45°$ をなす。
- 数値的には、なめらかな弾性衝突（撃力（impulse）は $\mathbf{n}$ 方向）を無作為に 10 000 回シミュレーションし、運動量とエネルギーの保存、および小問 (i) の速さを確認した。また μ が 0.172 と 5.83 の間にあるとき、小問 (ii) で求めた角において運動エネルギーが等しくなることも確認した。たとえば $\mu = 0.1$ とすると $\cos^2\theta = 1.51 > 1$ となり、これは不可能である。

よくある間違い

- **u** と **n** を平行として扱ってしまう。この衝突は斜め衝突（oblique collision）であり、相手に伝わるのは中心線方向の成分 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ だけである。
- v が零でない理由を述べずに v で割ってしまう（$v=0$ はエネルギーの等式の「衝突しない」解である）。
- $\cos\theta$ について負の平方根を除外し忘れる。

STEP のその先へ

衝突された粒子の速度を撃力の方向に沿って書き、そのうえで運動量とエネルギーを用いるという手法は、物理学における弾性散乱（elastic scattering）の核心である。これが最も見通しよく表れるのは重心系（centre-of-mass frame）においてであり、そこでは弾性衝突は二つの速度の大きさを変えずに向きを回転させるだけである。すると小問 (ii) の角の範囲は、実験室系（lab frame）においてどの角が実現可能かという主張に言い換えられる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、両方の座標系における衝突を非常にわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。