解答例

STEP III 2000、第 8 問

純粋数学 • 漸化式

> **STEP III 2000、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q8

鍵となる考え方

定義の規則は非線形（non-linear）で割り算を含むので、そのままでは扱いにくい。うまい手は、これを積の形 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$ に書き直すことである。これは、連続する三つの項からなるある組み合わせが常に 1 であることを述べている。同じ事実を一つ先の段階でも書き、二つの式を引き算すると、非線形の規則が線形（linear）の規則に変わる。漸化式（recurrence）が線形になれば、一般項（closed form）は二階線形漸化式の標準的な手法で求まる。すなわち、特性二次方程式（auxiliary quadratic）の根を求め、次に二つの初期値を合わせればよい。

解答

準備：数列がきちんと定義されること

各段階で a_{n-2} で割るので、どの項もゼロにならないことを確かめておくべきである。実際には、すべての項が正である。$a_0 = a_1 = 1 > 0$ である。a_{n-1} と a_{n-2} が正ならば、$1 + a_{n-1}^2 > 0$ かつ $a_{n-2} > 0$ なので、$a_n > 0$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての n について $a_n > 0$ である。最初のいくつかの項は次のとおりである。

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

線形漸化式

定義の両辺に a_{n-2} を掛けると、すべての $n \geq 2$ について

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \qquad (*)$$

を得る。$P(k)$ を命題 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ とする。k に関する帰納法により、すべての $k \geq 2$ について $P(k)$ を証明する。

基底（base case）。$a_2 = 2$ かつ $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$ なので、$P(2)$ は正しい。

帰納段階（inductive step）。ある $k \geq 2$ について $P(k)$ が正しい、すなわち

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}$$

であると仮定する。$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$ を示せばよい。定義より、$a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$ である。分子にある扱いにくい 1 を、$n = k$ のときの $(*)$、すなわち $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$ を使って置き換えるのがポイントである。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{根拠は} P(k) \\ &= 3a_k - a_{k-1} && \text{理由は} a_{k-1} > 0. \end{aligned}$$

よって $P(k+1)$ は正しい。帰納法により、すべての $n \geq 2$ について $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ である。

> **考えてみよう** 帰納法の仮定はどこで使われたか。また、$n = k$ のときの $(*)$ を使ってよいのはなぜか。

仮定が使われたのは一度だけで、$a_k + a_{k-2}$ を $3a_{k-1}$ に置き換えるところである。この括弧が現れたのは、1 を $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$ に取り替えたからにほかならない。$(*)$ を使うのに仮定はまったく必要ない。これは a_k の定義を展開しただけのものであり、すべての $k \geq 2$ について成り立つ。言い換えれば、量 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ はどの段階でも同じであり、それこそが線形の関係を先へと運んでいくのである。

一般項

$\beta = \alpha^{-1}$ とおく。$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ なので、

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

したがって

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

であるから、α^2 と β^2 はこの漸化式の特性方程式（auxiliary equation）$x^2 - 3x + 1 = 0$ の二つの根である。（具体的には、それらは $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ である。）

ここで、$n \geq 1$ について

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

と定める。b_n が a_n と最初の二項が等しく、同じ漸化式に従うことを確かめて、$b_n = a_n$ を示す。

漸化式に従うこと。x が $x^2 = 3x - 1$ の根ならば、両辺に x^{n-2} を掛けて $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$ を得る。（$\alpha\beta = 1$ を用いると）$\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$ なので、$x = \alpha^2$ として両辺に β を掛けると

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

を得る。同様に、$x = \beta^2$ として α を掛けると、$\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$ を得る。これらを足して $\sqrt{5}$ で割ると

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

初期値が一致すること。

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

結論。(a_n) と (b_n) はどちらも $n \geq 3$ について $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$ を満たし、$n = 1$ と $n = 2$ で一致する。このような漸化式は各項をその直前の二項から決定するので、（強い）帰納法（strong induction）により、すべての $n \geq 1$ について $a_n = b_n$ である。すなわち

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

となり、示すべきことが示された。

考えてみよう 比較を $n = 0$ ではなく $n = 1$ から始めるのはなぜか。

$n = 3$ での a_n の線形漸化式には a_2 と a_1 が関わるので、$n \geq 1$ については b_1 と b_2 を合わせれば十分である。実は、この公式は $n = 0$ でも成り立つ。$b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$ である。したがって、どちらから始めても何も失われない。

検算

- 項は $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$ であり、これはフィボナッチ数（Fibonacci numbers）$F_1, F_3, F_5, \ldots$ である（ただし $a_0 = 1 = F_{-1}$）。各項は直前の項の三倍からさらにその前の項を引いたものである：$3 \cdot 13 - 5 = 34$。

- $(*)$ を直接確かめる：$34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$。
- 数値的には $a_{10} = 4181$ であり、$(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$ である。項 $\alpha^{-19}/\sqrt{5}$ はごく小さいので、a_n は $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$ に最も近い整数である。
- 元の規則から $n = 39$ まで数列を厳密に計算すると、毎回線形漸化式を満たす整数が得られ、一般項と一致する。

よくある間違い

- $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ を $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$ に代入して展開することで、$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$ を証明しようとすること。これでは式が煩雑になるだけである。1 は一つ前の段階の定義を使って置き換えなければならない。
- 定義が a_{n-2} で割っていることを忘れること。完全な解答では、項が正であることに触れ、割り算と最後の a_{k-1} の約分が正当であることを示す。
- b_n が漸化式を満たすことだけを確かめ、**二つの**初期値を合わせないこと。二階漸化式には両方が必要である。

STEP のその先へ

定数 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ は、フィボナッチ数に関するカッシーニ（Cassini）の恒等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ の一例である。ここでは奇数番目の添字しか現れないので、符号は常に $+1$ である。より一般に、任意の二階線形漸化式について、$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$ は各段階で一定の倍率で変化する（これは 2×2 の行列式（determinant）であり、行列式は積を保つからである）。この数列のように、意外にも常に整数を生み出す有理式の漸化式は、「ソモス数列」（Somos sequences）やローラン現象（Laurent phenomenon）の研究と結びついている。フィボナッチ型の数列や連分数（continued fractions）の整数論については（α が黄金比（golden ratio）であることに注意）、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が素晴らしい読み物である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。