解答例

STEP III 2000、第 7 問

純粋数学 ・ 不等式と極限

> **STEP III 2000、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q7

鍵となる考え方

2 つの不等式はどちらも、積をすでによく知っているものと比較することから得られる。$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を二項定理（binomial theorem）で展開すると、$\frac{1}{r!}$ とよく似ていて、それより少しだけ小さい項が現れる。積 $\mathrm{P}(n)$ については、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を使うと、n 個の因数の積をそれらの平均の n 乗に置き換えられる。因数は $1+\frac{1}{2^k}$ であり、その平均は $1+\frac{1}{n}$ をわずかに下回る。これが前半の結果にそのままつながる。

解答

評価 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

二項定理により、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

2 つ目の分数は r 個の因数の積

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

であり、$0 \le j \le r-1 \le n-1$ であるから、各因数は $(0,1]$ に属する。したがってこの積は 1 以下であり、展開の各項は $\frac{1}{r!}$ 以下である。よって

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

が成り立つ。ここで最後の不等式が等号を含まないのは、省かれた項 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \ldots$ がすべて正だからである。これはすべての正の整数 n について成り立つ。

評価 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

$\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$、$a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$ とおく。これらはすべて正であるから、相加・相乗平均の不等式が使える。相加平均は

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1-2^{-n}}{n},$$

である。ここで等比級数（geometric series）の和 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$ を用いた。$1 - 2^{-n} < 1$ であるから、この平均は $1 + \frac{1}{n}$ より真に小さい。よって相加・相乗平均の不等式から

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \leq 1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

両辺とも正であるから、n 乗しても不等式は保たれる：

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

ただし 2 つ目の不等式には前半の結果を用いた。これはすべての正の整数 n について成り立つ。

考えてみよう 等号を含まない不等式はどこから来たのか？　相加・相乗平均の不等式からは $\leq$ しか得られない。

不等式が真に成り立つのは $1 - 2^{-n} < 1$ のおかげであり、相加・相乗平均の不等式によるものではない。実際、$n \geq 2$ のときは因数 a_k がすべて異なるので、相加・相乗平均の不等式そのものも等号なしで成り立つ。しかし $n = 1$ のときは因数が 1 つしかなく、相加・相乗平均の不等式は等式になる（$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$）。一方、$1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ という段階はどの場合にも等号なしで成り立つので、この議論はすべての n を扱えている。

極限

各因数 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$ は 1 より大きいので、$\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$ である。したがって数列 $\mathrm{P}(n)$ は狭義単調増加（strictly increasing）であり、e によって上に有界（bounded above）である。上に有界な単調増加数列は収束（converge）するので、$\mathrm{P}(n)$ はある極限（limit）L に近づく。

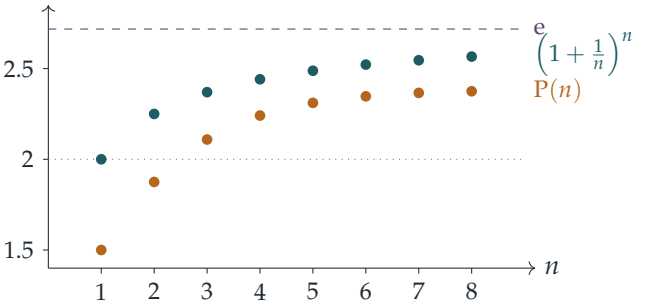
上からの評価：すべての n について $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$ であるから、極限は $L \leq \mathrm{e}$ をみたす。（極限をとって保たれるのは等号を含む不等式だけである。$<$ ではなく $\leq$ となるのはそのためである。）

下からの評価のために、いくつかの項を計算する：

$$\mathrm{P}(1)=\frac{3}{2},\qquad \mathrm{P}(2)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8},\qquad \mathrm{P}(3)=\frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{135}{64}>\frac{128}{64}=2.$$

数列は単調増加であるから、$L\geq \mathrm{P}(4)>\mathrm{P}(3)>2$ である。以上をあわせて

$$2<L\leq \mathrm{e}.$$



検算

- $n=1$ のとき：$(1+1)^1=2<\mathrm{e}$ かつ $\mathrm{P}(1)=1.5<2$ である。$n=4$ のとき：$\mathrm{P}(4)=\frac{2295}{1024}\approx 2.241<\left(\frac{5}{4}\right)^4\approx 2.441$ である。
- 積を数値的に計算すると、$\mathrm{P}(n)$ は $L\approx 2.3842$ に落ち着く（$n=60$ までに小数点以下何桁にもわたって一定になる）。これは 2 と $\mathrm{e}\approx 2.7183$ の間に余裕をもって収まっている。

よくある間違い

- 各 $\mathrm{P}(n)<\mathrm{e}$ であるというだけで $L<\mathrm{e}$ と主張してしまう。等号を含まない不等式は極限で等式になりうるので、導かれるのは $L\leq \mathrm{e}$ だけである。（ここでは実際に $L<\mathrm{e}$ が成り立つが、それには別の議論が必要である。）
- ある n について $\mathrm{P}(n)>2$ を示しながら、数列が単調増加であることを述べ忘れる。その評価を L に受け渡すのは単調増加性である。
- a_k が正であることを確かめずに相加・相乗平均の不等式を使う。

STEP のその先へ

「単調増加で上に有界であるから収束する」という段階は単調収束定理（monotone convergence theorem）であり、これは実数の完備性（completeness）と同値である。

これを基本原理から証明することは、大学の解析学（analysis）の講義で最初に扱う事柄の一つである。対数（logarithm）をとると $\mathrm{P}(n)$ は級数 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$ に変わり、これは $\sum 2^{-k}$ との比較によって収束する。これが無限積（infinite product）を調べる標準的な方法である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この 2 つの考え方を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。