解答例

STEP III 2000、第 6 問

純粋数学 • 四次多項式の因数分解

STEP III 2000、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q6

鍵となる考え方

係数を比較する（comparing coefficients）と、因数分解（factorisation）は p, q, r と a, b, c を結ぶ 3 つの方程式に帰着する。a だけの方程式を得るには b と c を消去（eliminate）しなければならないが、恒等式（identity）$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$ がまさにその役割を果たす。$b+c$ と $b-c$ こそが自然に現れる組合せだからである。最後の 4 次式（quartic）については、まず y^3 の項を取り除く必要があり、それは平行移動（shift）$y = x + k$ によって実現できる。

解答

p、q、r を求める

右辺を展開すると

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + a(b-c)x + bc,$$

となる。ここで x^3 の項 $ax^3 - ax^3$ は打ち消し合う。係数を比較して

$$p = b + c - a^2, \qquad q = a(b-c), \qquad r = bc.$$

a^2 が満たす 3 次方程式

$u = a^2$ とおく。第 1 式から $b + c = p + u$ である。

$a \neq 0$ ならば、第 2 式から $b - c = q/a$ であるので $(b-c)^2 = q^2/u$ となる。すると

$$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4r = (p+u)^2 - \frac{q^2}{u}.$$

両辺に $u \neq 0$ を掛けて

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

となるので、$u = a^2$ はこの3次方程式（cubic）の解である。

$a = 0$ ならば $q = a(b - c) = 0$ であり、このとき3次式のすべての項が $u = 0$ で0になるので、$u = a^2 = 0$ は解である。したがって、いずれの場合も a^2 は解であり、示すべきことが示された。

考えてみよう p、q、r が何であっても、$u \geq 0$ を満たす解が必ず存在するのはなぜか。

この3次式を $f(u)$ とおく。$u = 0$ では $f(0) = -q^2 \leq 0$ であり、最高次の項が u^3 であるから、$u \to +\infty$ のとき $f(u) \to +\infty$ となる。$q = 0$ ならば $u = 0$ そのものが解である。そうでなければ $f(0) < 0$ であり、ある大きな U に対して $f(U) > 0$ となるので、f は連続（continuous）であることから、中間値の定理（intermediate value theorem）により0と U の間（両端を除く）に解が存在する。いずれにせよ、負でない解が存在する。

このことが重要なのは、$a = \sqrt{u}$ が実数である必要があるからである。負でない解からは常に実数の a が得られるので、x^3 の項をもたない実係数の4次式はすべて、与えられた形の2つの実係数2次式に分解できる。（$u > 0$ ならば、$b + c = p + u$ と $b - c = q/\sqrt{u}$ から b と c を求めることができる。）

$p = -1, q = -6, r = 15$ の場合

このとき $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$ であるから、3次方程式は

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

となる。$u = 9$ のとき $729 - 162 - 531 - 36 = 0$ であるから、$u = 9$ は解である。（割り算をすると $(u - 9)(u^2 + 7u + 4)$ となり、2次の因数は2つの負の解をもつので、負でない解は $u = 9$ のみである。）

4 次式の因数分解

与えられた 4 次式には y^3 の項があるので、平行移動によってこれを取り除く。解の和は 8 であるから、その平均は 2 であり、$y = x + 2$ とおく。各項を展開すると

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16,\\ -8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64,\\ 23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92,\\ -34(x+2) &= -34x - 68,\end{aligned}$$

となり、これらと 39 を足し合わせて

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

を得る。これはちょうど $p = -1, q = -6, r = 15$ の場合であり、この場合が登場した理由はここにある。

$u = a^2 = 9$ とし、$a = 3$ をとる。すると

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

であるから、$b = 3$、$c = 5$ となる。確認として $bc = 15 = r$ である。よって

$$x^4 - x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 5).$$

最後に $x = y - 2$ を代入すると

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 3 &= (y^2 - 4y + 4) - (3y - 6) + 3 = y^2 - 7y + 13,\\ x^2 + 3x + 5 &= (y^2 - 4y + 4) + (3y - 6) + 5 = y^2 - y + 3.\end{aligned}$$

したがって

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = (y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3).$$

代わりに $a = -3$ をとると b と c が入れ替わり、同じ 2 つの因数が逆の順序で得られる。

検算

- 答えを展開する：$(y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3) = y^4 - 8y^3 + (3 + 7 + 13)y^2 - (21 + 13)y + 39$ となり、一致する。
- $y = 1$ を代入する：4 次式は $1 - 8 + 23 - 34 + 39 = 21$ であり、因数からは $7 \times 3 = 21$ が得られる。

- 2 つの 2 次因数の判別式（discriminant）はともに負（-3 と -11）であるから、どちらも実数の範囲ではこれ以上分解できず、4 次式は実数解をもたない。これは $y = 1$ で正の値をとることと整合する。

また、p, q, r の公式と 3 次方程式を a, b, c の無作為な有理数の選び方 2000 通りで検証し、無作為な (p, q, r) 2000 組について二分法（bisection）で負でない解を求めた。

よくある間違い

- $a = 0$ の場合を扱わずに、a で割って $b - c = q/a$ を得てしまう。
- 「3 次方程式は必ず実数解をもつ」と論じること。これは正しいが、その解が負でないことは示していない。肝心なのは $f(0) = -q^2$ の符号である。
- 最後に x から y へ戻す代入を忘れる。

STEP のその先へ

これは本質的に、一般の 4 次方程式を解くためのデカルト（Descartes）の方法（およびフェラーリ（Ferrari）の方法）である。すなわち、3 次の項を平行移動で消し、補助的な 3 次方程式である**分解 3 次式**（resolvent cubic）を解くことで、2 つの 2 次式に因数分解するのである。3 次方程式に対するカルダーノ（Cardano）の公式と組み合わせると、すべての 4 次方程式が冪根によって解ける（solvable by radicals）ことがわかる。なぜこれが 4 次で止まり、一般の 5 次方程式にはそのような公式が存在しないのかを扱うのが、ガロア（Galois）理論である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、学び始めるのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。