解答例

STEP III 2000、第 5 問

純粋数学 • 線形変換

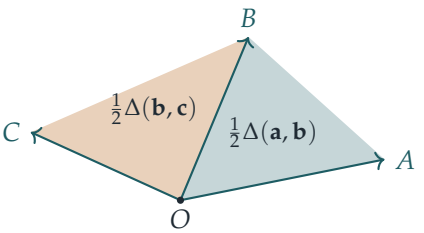
STEP III 2000、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q5

鍵となる考え方

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を列とする行列の行列式（determinant）であり、したがって三角形 OAB の符号付き面積（signed area）の 2 倍に等しい。また、これが 0 でないのは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行（parallel）でないときに限る。線形写像（linear map）は、このような面積をすべて同じ倍率、すなわちその行列式倍する。この一つの事実から、必要性（necessity）はただちに従う。十分性（sufficiency）については、(ii) の恒等式（identity）が $\mathbf{c}$ を Δ だけを用いて $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で表すので、$\mathbf{M}$ が A と B によって決まってしまえば、C の行き先に選択の余地はない。



解答

以下を通して、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ を列とする 2×2 行列を $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$ と書く。すると

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

零でない $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ に対して、$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ となるのは $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行であるときに限る。行列式が 0 になるのは、一方の列が他方の列の定数倍であるときにちょうど限られるからである。よって、$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$、$\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$、$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ の六つはすべ

て 0 でない。

さらに二つの事実を繰り返し用いる。（列ごとに見て）$\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \ \mathbf{Mv}]$ であり、行列式は積を保つから、

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \qquad (*)$$

また、$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ である。

小問 (i)

求めたいのは $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ かつ $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$ であり、これらをまとめると

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないから $\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ であり、$[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$ は逆行列をもつ（invertible）。したがって

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

が条件を満たす。実際、右から逆行列を掛けることができるので、このような行列はこの $\mathbf{M}$ **ただ一つ**である。行列式をとると $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})/\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ であり、これは 0 でない。

小問 (ii)：恒等式

左辺の第 1 成分（component）をとると

$$\begin{aligned} &(a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 \\ &\quad = a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 = 0, \end{aligned}$$

となる。六つの項が二つずつ打ち消し合うからである。第 2 成分は、Δ の外にある $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ の添字をすべて 1 から 2 に変えた同じ計算である：

$$\begin{aligned} &(a_1b_2 - a_2b_1)c_2 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 \\ &\quad = a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 = 0. \end{aligned}$$

よって

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\,\mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

が示された。この恒等式は**任意の**三つのベクトルについて成り立つので、$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ についても成り立つ：

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,\mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\,\mathbf{p} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

考えてみよう 比の条件は、等式として正確には何を述べているのか？

Δ はすべて 0 でないから、条件 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ は、ある一つの数 $k \neq 0$ が存在して

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = k\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = k\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = k\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}). \tag{3}$$

となることを意味する。言葉でいえば、三角形 OPQ、OQR、ORP の三つの符号付き面積は、三角形 OAB、OBC、OCA の面積をすべて同じ倍率で拡大したものである。

小問 (ii)：必要性

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$、$\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ と仮定する。$(*)$ より

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

これは $k = \det\mathbf{M}$ とした (3) であり、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$ であるから $k \neq 0$ である。よって比は等しい。

小問 (ii)：十分性

次に、ある $k \neq 0$ について (3) が成り立つと仮定する。小問 (i) より、$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ かつ $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ が存在する。示すべきことは、この同じ $\mathbf{M}$ が $\mathbf{c}$ も $\mathbf{r}$ に移すことである。

(1) に $\mathbf{M}$ を作用させる。行列の積は線形であり、Δ はただの数であるから

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

両辺に k を掛け、各項に (3) を用いると

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

(2) より、右辺は $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$ に等しい。よって

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

であり、（$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ は平行でないので）$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$ であるから、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ である。したがって P、Q、R は $\mathbf{M}$ による A、B、C の像である。

必要性と十分性を合わせて、比の条件が必要十分条件であることが証明された。

検算

- $\mathbf{a} = \binom{1}{0}$、$\mathbf{b} = \binom{0}{1}$、$\mathbf{c} = \binom{1}{1}$ として試す。すると $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) = -1$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = -1$ であり、(1) は $\binom{1}{1} - \binom{0}{1} - \binom{1}{0} = \mathbf{0}$ となる。$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{p} = \binom{2}{0}$、$\mathbf{q} = \binom{1}{3}$、$\mathbf{r} = \binom{3}{3}$ が得られ、三つの Δ は 6、-6、-6 である。これも比は $1:-1:-1$ であり、$k = 6 = \det \mathbf{M}$ となっている。
- 数値的には、20,000 組の整数のランダムな三つ組について、厳密な分数計算を用いて恒等式を確かめた。どの二つのベクトルも平行でない約 17,700 組について、小問 (i) から $\mathbf{M}$ を構成し、必要性を確認するとともに、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ となるのは (3) が成り立つときにちょうど限られることを確認した。

よくある間違い

- Δ が 0 でないことを述べずに、比の条件を分数の等式一つとして書いてしまう。どの二つのベクトルも平行でないという仮定は、まさにすべての割り算を正当なものにするために置かれている。
- 必要性だけを証明してしまう。本当の中身は十分性である。行列は一次独立な二つのベクトルへの作用で決まってしまうので、条件が三つ目の像を強制しなければならない。
- Δ の中の順序による符号の誤り。$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$ であるから、$\mathbf{b},\mathbf{c}$ の次に $\mathbf{c},\mathbf{a}$ という巡回的な順序が重要である。

STEP のその先へ

恒等式 (1) は、姿を変えたクラメルの公式（Cramer's rule）である。これは基底（basis）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ に関する $\mathbf{c}$ の座標を行列式の比として与える。線形写像はあらゆる符号付き面積を $\det \mathbf{M}$ 倍するという事実 $(*)$ は、行列式の幾何学的な定義であり、二重積分（double integral）の変数変換（change of variables）に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子の背後にあるものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これら両方の考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。