解答例

STEP III 2000、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数のグラフ

> **STEP III 2000、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q4

鍵となる考え方

$f(x) = x + c$ とおいて分母を払うと、3 次（cubic）の項は打ち消し合い、x の 2 次式（quadratic）が残る。したがって直線が曲線と交わるかどうかは判別式（discriminant）の符号に帰着し、しかもその判別式自体が c の 2 次式であるから、判別式の判別式を考えることになる。グラフの概形については、f を 1 次式の部分と部分分数（partial fractions）に分解すればすべてがわかる。すなわち、漸近線（asymptote）、曲線が漸近線のどちら側にあるか、そして斜めの漸近線（oblique asymptote）と交わる点である。

解答

直線と曲線の交わり

$x \neq \pm 1$ のとき、方程式 $f(x) = x + c$ は

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

と同値である。展開すると $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$ となる。x^3 の項は打ち消し合い、

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

が残る。よって、直線が曲線と交わるのは、$(*)$ が $x = \pm 1$ 以外の実数解をもつときであり、かつそのときに限る。

? **考えてみよう** $(*)$ の解が、除外された値 $x = \pm 1$ のいずれかになることはありうるか？

代入すると、$q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1-a$ および $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$ である。どちらも c によらないので、$x=1$ が解になるのは $a=1$ のときに限り、$x=-1$ が解になるのは $a=-1$ のときに限る。$|a| \neq 1$ ならば、$(*)$ のすべての実数解が本当の交点を与える。

$a+2+c=0$ の場合。このとき $(*)$ は1次方程式 $-(2a+1)x + (a+2) = 0$ になる。$|a|>1$ ならば $2a+1 \neq 0$ であるから、解 $x = \frac{a+2}{2a+1}$ が存在する。

$a+2+c \neq 0$ の場合。このとき $(*)$ は本当の2次方程式であり、その判別式は

$$D(c) = (2a+1)^2 + 4c(a+2+c) = 4c^2 + 4(a+2)c + (2a+1)^2.$$

である。D を、最高次の係数が正である c の2次式とみなす。その判別式は

$$\begin{aligned} 16(a+2)^2 - 16(2a+1)^2 &= 16[(a+2)-(2a+1)][(a+2)+(2a+1)] \\ &= 16(1-a)\cdot 3(1+a) = 48(1-a^2). \end{aligned}$$

である。

$|a|>1$ ならば、これは負であるから、すべての c に対して $D(c) > 0$ となる。このとき $(*)$ は異なる2つの実数解をもち、どちらも ± 1 には等しくない。1次方程式の場合と合わせて、直線 $y = x + c$ はすべての c に対して曲線と交わる。

$|a|=1$ ならば、すべての c に対して $D(c) \geq 0$ であるから、$(*)$ は依然として常に実数解をもつ。これが主張の代数的な中身である。しかしこの場合、曲線そのものが退化する。因数が約分され、曲線は1点が欠けた双曲線（hyperbola）になるのである。たとえば $a=1$ のとき $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+1}$（$x \neq 1$）となり、直線 $y = x-3$（その漸近線）はこの曲線と交わらない。$(*)$ においてこれは $c=-3$ にあたり、そのときの唯一の解は除外された $x=1$ である。よって $|a|=1$ のときは、これらの例外的な c の値を除いて主張が成り立ち、$|a|>1$ のときは例外なく成り立つ。

$|a|<1$ ならば、2次式 $D(c)$ は2つの実数解をもち、その2解の間（両端を除く）で負になる。具体的には、2解の中点 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$ を選べばよい。

$$D(-\tfrac{1}{2}(a+2)) = (a+2)^2 - 2(a+2)^2 + (2a+1)^2 = 3(a^2-1) < 0.$$

この c に対して $a+2+c = \frac{1}{2}(a+2) \neq 0$（$a > -1$ より）であるから、$(*)$ は判別式が負の本当の2次方程式であり、実数解をもたない。したがって、直線 $y = x - \frac{1}{2}(a+2)$ は曲線と交わらず、示すべきことが示された。

斜めの漸近線

$x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$ を $x^2 - 1$ で割ると

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{(2a+1)x - (a+2)}{x^2-1}.$$

となる。$x \to \pm\infty$ のとき分数の部分は 0 に近づくので、斜めの漸近線は

$$y = x - a - 2.$$

である。グラフを描くには、分数を部分分数に分解しておくと便利である。

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{a-1}{2(x-1)} + \frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

これですべてがわかる。

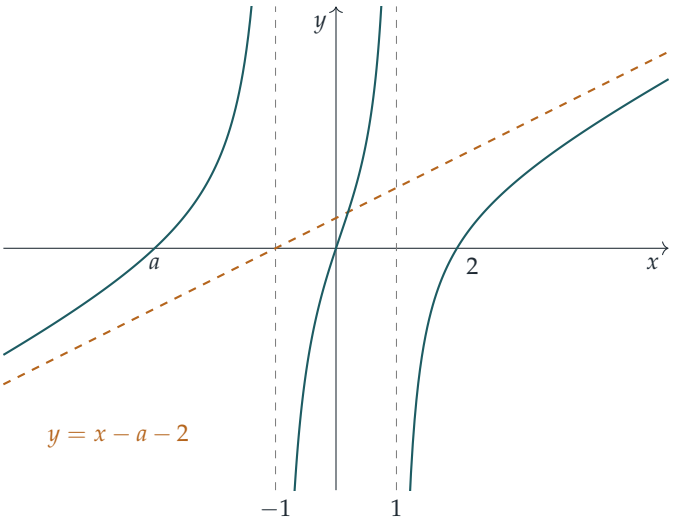
- 零点は $x = 0,\ 2,\ a$ であり、鉛直漸近線（vertical asymptote）は $x = \pm 1$ である。
- 曲線が斜めの漸近線と交わるのは $(2a+1)x = a+2$ となる点、すなわち $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$ のみである（これは再び $(*)$ の 1 次方程式の場合である）。
- $|x|$ が大きいとき、差 $f(x) - (x-a-2)$ は $\frac{2a+1}{x}$ のようにふるまう。どちらの場合も $2a+1 < 0$ であるから、曲線は $x \to +\infty$ のとき漸近線の**下側**に、$x \to -\infty$ のとき漸近線の**上側**にある。
- 係数 $\frac{a-1}{2}$ と $\frac{3(a+1)}{2}$ が、$x = 1$ と $x = -1$ のそれぞれの両側でのふるまいを決める。

場合 (i)：$a < -1$

2 つの係数はともに負である：$\frac{a-1}{2} < 0$ かつ $\frac{3(a+1)}{2} < 0$。よって $x \to 1^-$ または $x \to -1^-$ のとき $f(x) \to +\infty$ であり、$x \to 1^+$ または $x \to -1^+$ のとき $f(x) \to -\infty$ である。さらに

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

である。引かれている 2 つの項がともに負だからである。したがって f は 3 つの分枝のそれぞれで増加し、極値をとる点（turning point）はまったくない。交点は $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$ および $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$ を満たすので、$-1 < x_0 < 1$ である。すなわち、曲線は中央の分枝で漸近線と交わる。零点は $a < -1$（左の分枝）、0（中央）、2（右）にある。



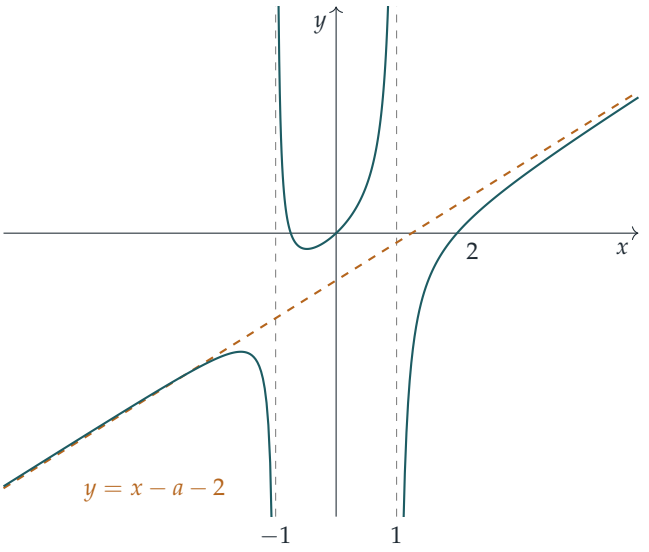
($a = -3$ の場合の図。このとき漸近線は $y = x + 1$、$x_0 = \frac{1}{5}$ である。)

場合 (ii)：$-1 < a < -\frac{1}{2}$

今度は $\frac{a-1}{2} < 0$ だが $\frac{3(a+1)}{2} > 0$ である。$x = 1$ の近くでのふるまいは先ほどと同じ（左から $+\infty$、右から $-\infty$）だが、$x = -1$ の近くでは逆転する。すなわち $x \to -1^-$ のとき $f(x) \to -\infty$、$x \to -1^+$ のとき $f(x) \to +\infty$ である。また $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} < 0$ であるから $x_0 < -1$、つまり交点は左の分枝にある。零点 a と 0 はともに $(-1, 0)$ に含まれる。

? **考えてみよう** 求めることは要求されていないが、極値をとる点はどこになければならないか？

左の分枝では、曲線は $-\infty$ から漸近線の上側を上ってきて、x_0 で漸近線と交わり、$x \to -1^-$ のとき $-\infty$ へ下っていく。よって極大点をもつ。この分枝には零点がない（3 つの零点はすべて > -1）ので、分枝全体が x 軸の下側にある。中央の分枝では両端で $f \to +\infty$ となり、a と 0 の間で軸の下にもぐり、それ以外では正であるから、a と 0 の間に極小点がある。右の分枝では、$x > 1$ に対して $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} < 1$ であるから $f'(x) > 0$ となる。すなわち曲線は $-\infty$ から上って $x = 2$ を通り、下側から漸近線に近づく。



($a=-\frac{3}{4}$ の場合の図。漸近線は $y=x-\frac{5}{4}$、交点は $x_0=-\frac{5}{2}$ であり、$-\frac{3}{4}$ と 0 の間で軸の下にわずかにもぐる。)

検算

- $a=0$、$c=-1$（我々の選んだ $c=-\frac{1}{2}(a+2)$）のとき、$(*)$ は $x^2-x+1=0$ となり、その判別式は -3 である。予想どおり交点はない。
- $a=-3$ のとき、$f(-1.1)\approx 30.9$、$f(-0.9)\approx -28.8$ であり、場合 (i) で $x\to -1^{\mp}$ について求めた符号と一致する。$a=-\frac{3}{4}$ のときは $f(-1.1)\approx -5.7$、$f(-0.9)\approx 2.1$ であり、場合 (ii) の逆転したふるまいと一致する。
- 各範囲のいくつかの a について f' の符号の変化を数値的に数えると、場合 (i) では極値をとる点がなく、場合 (ii) では左と中央の分枝にちょうど 1 つずつあることが確かめられる。

よくある間違い

- $(*)$ の解 $x=\pm 1$ は交点ではないことを忘れる。$|a|=1$ のときにうまくいかなくなるのはまさにこの点である。
- $a+2+c=0$ の場合を見落とす。このとき $(*)$ は 1 次方程式であり、判別式による議論は使えない。
- 場合 (ii) で鉛直漸近線 $x=-1$ のどちら側かを取り違える。そこでは $a+1$ の符号

によって図が変わる。

STEP のその先へ

$|a| < 1$ のとき、$D(c)$ の 2 つの解は曲線に接する直線 $y = x + c$ を与え、その間にある直線は曲線と交わらない。a が ± 1 を横切ると、これらの接線が現れたり消えたりし、曲線の形が変わる。零点が鉛直漸近線を通過し、その両脇でのふるまいが逆転するのである。曲線の族の定性的な形がパラメータとともにどう変化するかを調べることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点であり、大学 1 年次の微分方程式（differential equations）の講義で出会う。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照せよ。この種のグラフを描く練習をさらに積むには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）が非常に優れている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。